

Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

Versuchsanleitung für das Praktikum B

– Version vom 21. Februar 2023 –

1 Versuchsziel

Ziel dieses Praktikumsversuchs ist es, den Wert der Elementarladung e zu ermitteln. Hierzu werden von geladenen Öltröpfchen im elektrischen Feld eines Plattenkondensators mithilfe eines Mikroskops und einer Kamera Videoaufnahmen gemacht. Die Messmethode ist an die Forschungen von Robert Andrew Millikan angelehnt. Millikan gelang es zu Beginn des 20. Jahrhunderts, die Quantisierung der elektrischen Ladung in Vielfache einer Elementarladung nachzuweisen sowie den exakten Wert der Elementarladung mit hoher Genauigkeit zu ermitteln. Im Jahr 1923 wurde er für seine Arbeiten zur Bestimmung der Elementarladung sowie für die experimentelle Überprüfung der Lichtquantenhypothese mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet.

2 Physikalische Grundlagen

Die Messmethode Millikans ist dadurch gekennzeichnet, dass winzige, geladene Öltröpfchen zwischen die waagrecht angeordneten Platten eines Kondensators gesprüht werden. Die Tröpfchen laden sich beim Sprühvorgang durch Reibung an der Luft unterschiedlich elektrisch auf. Das elektrische Feld des Kondensators steht parallel zum Gravitationsfeld der Erde. Die Coulombkraft wirkt je nach Polung des Feldes und des Vorzeichens der Tröpfchenladung in gleicher Richtung oder entgegen der Gravitationskraft. Es wirken betragsmäßig folgende Kräfte:

Elektrische Kraft:

Die Kraft auf eine Ladung Q in einem Plattenkondensator ist:

$$F_c = Q \frac{U}{d} ,$$

wobei U die Spannung und d der Abstand der Kondensatorplatten ist.

Gravitationskraft :

Auf ein Öltröpfchen der Masse M , des Radius r und der Dichte $\rho_{\text{öl}}$ wirkt unter der Erdbeschleunigung g die Gravitationskraft

$$F_G = Mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{öl}} g .$$

Auftriebskraft:

Ein Tröpfchen mit dem Radius r erhält in der Luft mit der Dichte ρ_{Luft} unter der Erdbeschleunigung g eine Auftriebskraft

$$F_A = \rho_{\text{Luft}} \frac{4}{3}\pi r^3 g .$$

Reibungskraft:

Auf eine Kugel vom Radius r mit einer Geschwindigkeit v in einem viskosen Medium der Viskosität η wirkt die Stokes-Reibungskraft

$$F_R = 6\pi r \eta v .$$

Richtungen der Kräfte:

Unabhängig von der Bewegungsrichtung des Tröpfchens ist die Gravitationskraft F_G immer nach unten gerichtet und die Auftriebskraft F_A immer nach oben gerichtet. Die Reibungskraft wirkt immer entgegen der Bewegungsrichtung.

Für den Fall, dass die elektrische Kraft F_C nach oben gerichtet ist und $F_C + F_A > F_G$ ist, steigt das Tröpfchen. Daher ist die Reibungskraft nach unten gerichtet.

Ist die elektrische Kraft F_C hingegen nach unten gerichtet, sinkt das Tröpfchen und die Reibungskraft zeigt nach oben.

Auf Grund der Reibungskraft stellt sich für beide Fälle ein Kräftegleichgewicht ein. Für ein steigendes Tröpfchen gilt

$$\begin{aligned} 0 &= F_A - F_G - F_R + F_C \\ &= \left(\rho_{\text{Luft}} \frac{4}{3}\pi r^3 g\right) - \left(\rho_{\text{öl}} \frac{4}{3}\pi r^3 g\right) - \left(6\pi r \eta v_{\text{steig}}\right) + \left(Q \frac{U}{d}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{steig} = \frac{1}{6\pi\eta r} \left(Q \frac{U}{d} - \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft}) \right)$$

Für ein sinkendes Tröpfchen gilt analog

$$0 = F_A - F_G + F_R - F_C$$

woraus folgt, dass

$$v_{sink} = \frac{1}{6\pi\eta r} \left(Q \frac{U}{d} + \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft}) \right) .$$

Berechnung des Radius und der Ladung:

Durch Subtraktion der Geschwindigkeiten erhält man:

$$v_{sink} - v_{steig} = \frac{4r^2 g (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft})}{9\eta} ,$$

$$\text{und somit } \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta (v_{sink} - v_{steig})}{4g (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft})}} . \quad (1)$$

Durch Addition der Geschwindigkeiten erhält man:

$$v_{sink} + v_{steig} = \frac{2QU}{6\pi r \eta d} , \quad (2)$$

durch Einsetzen von Gleichung (1) und Umformen nach Q ergibt sich

$$Q = \frac{9\pi d}{2U} \sqrt{\frac{\eta^3 (v_{sink} - v_{steig})}{g (\rho_{\ddot{o}l} - \rho_{Luft})}} (v_{sink} + v_{steig}) .$$

Die Geschwindigkeiten der Sink- und Steigbewegungen der geladenen Öltröpfchen mit Ladung Q und Radius r im elektrischen Feld eines Plattenkondensators werden im Rahmen dieses Versuchs über die Bestimmung von Zeitfolgen der Positionen der Tröpfchen ermittelt. Der Abstand der Kondensatorplatten d beträgt $(2,50 \pm 0,03)$ mm. Für die Viskosität η gilt $(1,81 \pm 0,02) \times 10^{-5}$ Pa s. Die Erdbeschleunigung g beträgt $9,81$ m/s, die Dichte von Silikonöl $\rho_{\ddot{o}l}$ beträgt 1030 kg/m³ und die Dichte der Luft ρ_{Luft} beträgt $1,29$ kg/m³. Der Fehler für die Dichte des Öls ist nicht bekannt, der Fehler für die Dichte von Luft ist im Verhältnis zur Dichte des Öls vernachlässigbar klein. Die Spannung U wird bei der jeweiligen Messung vom Spannungsmessgerät abgelesen, bitte überlegen Sie sich einen geeigneten Fehler.

Cunningham Korrektur:

Bei Ihren Messungen werden Sie die Feststellung machen, dass mit abnehmendem Radius die ermittelten Geschwindigkeiten und somit der Wert für die ermittelte Ladung ansteigt. Der Grund hierfür liegt darin, dass sobald die mittlere freie Weglänge $\langle l \rangle$ der Luftmoleküle nicht mehr sehr klein gegenüber dem Radius r der Tropfen ist, die Luft für ein Tröpfchen körnig und der Abstand zwischen den Luftmolekülen relevant wird. Die Stöße mit den Luftmolekülen werden umso seltener, je kleiner das Tröpfchen wird. Im hypothetischen Extremfall für $r \ll \langle l \rangle$ könnte ein Tröpfchen quasi ungebremst durch die Zwischenräume der sich bewegenden Luftmoleküle beschleunigt werden, bzw. würde es sehr unwahrscheinlich, dass es mit einem Luftmolekül zusammenstößt und abgebremst wird. Das Reibungsgesetz muss in Abhängigkeit zum Radius korrigiert werden. In diesem Versuch wird die von Millikan verwendete Cunningham-Korrektur benutzt:

$$\eta_c = \eta (1 + A_C \langle l \rangle / r)^{-1},$$

wobei $\langle l \rangle = 6,4 \times 10^{-8}$ m die mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle ist und $A_C = 1,26$ eine Konstante. Sowohl für die Berechnung des Radius als auch für die Berechnung der Ladung muss diese Korrektur berücksichtigt werden. Für den korrigierten Radius ergibt sich somit (Herleitung findet sich im Anhang):

$$r_{Korr} = -\left(\frac{A_C \langle l \rangle}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{A_C \langle l \rangle}{2}\right)^2 + \frac{9\eta(v_{sink} - v_{steig})}{4g(\rho_{öl} - \rho_{Luft})}}$$

und für die korrigierte Ladung ergibt sich:

$$Q_{Korr} = \frac{3\pi\eta r_{Korr} d}{U} \left(1 + A_C \frac{\langle l \rangle}{r_{Korr}}\right)^{-1} (v_{sink} + v_{steig}).$$

3 Versuchsaufbau

Der experimentelle Aufbau besteht aus Spannungsquellen, Multimeter, Kommutatorschalter, Dreibein mit montierter Kammer, in der sich der Plattenkondensator befindet, Mikroskop-Optik mit vorgeschalteter CCD-Kamera, Computer mit notwendiger Software, Beleuchtung und einem Ölzerstäuber mit Blasebalg. **Bitte ändern Sie nicht die Einstellung an der Spannungsquelle für die Beleuchtung oder für die Kamera!!!**

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

Im Wesentlichen besteht die Versuchsdurchführung darin, Filmaufnahmen von geladenen Öltröpfchen zu machen und diese im Hinblick auf die Bestimmung der Geschwindigkeit der Tröpfchen zu untersuchen. Im Objektiv des Mikroskops, durch das die Tröpfchen beobachtet werden können, ist eine Mikrometerskala aufgezeichnet. Die gesamte Länge der Mikrometerskala beträgt $(0,96 \pm 0,01)$ mm. Die Wahl der größtmöglichen Strecke ist günstig, weil sich dadurch der Fehler verkleinert. Außerdem wird durch Wahl eines fixen Streckenabschnitts die Messung dahingehend vereinfacht, dass die Strecke nur einmalig gemessen werden muss.

Für die Aufnahme wählt man zunächst die elektrische Feldstärke so, dass ein geladenes Tröpfchen im Kondensator steigt. Durch Umschalten des Kommutatorschalters lässt sich das Tröpfchen im Sichtfeld halten. Um die Zeit zu ermitteln, die die Tröpfchen für das Passieren eines Streckenabschnitts benötigen, wird eine Videosequenz aufgezeichnet, in der ein Tröpfchen beim Sinken und beim Steigen zu sehen ist. Mit dem Programm VirtualDub lässt sich das Video Bild für Bild abspielen und auswerten. So kann ermittelt werden, wie viele Bilder zwischen dem Passieren zweier Skalenteile liegen. Über die Aufnahmegeschwindigkeit, die mit 32,792 Bildern pro Sekunde angegeben wird, lässt sich die Laufzeit des Öltröpfchens für den definierten Streckenabschnitt errechnen und so die Geschwindigkeit des jeweiligen Tröpfchens bestimmen.

Für jedes Tröpfchen sind mindestens fünf Steig- und fünf Sinkzeiten zu ermitteln. Daraus wird der Mittelwert \bar{x} durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

bestimmt. Der Fehler für die Zeit ist durch die Standardabweichung des Mittelwertes zu errechnen:

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} .$$

Durch Kenntnis der zurückgelegten Strecke s und der dafür benötigten Zeit t lässt sich mit $v = s/t$ die jeweilige Geschwindigkeit v errechnen. Für den Fehler der Geschwindigkeiten gilt:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t_i} = -\frac{s_i}{t_i^2} ; \quad \frac{\partial v_i}{\partial s_i} = \frac{1}{t_i} ; \quad \Delta v_i = v_i \sqrt{\left(\frac{\Delta s_i}{s_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t_i}{t_i}\right)^2} .$$

Die angelegte Spannung U wird zwischen 300 und 600 Volt gewählt. Der Kommutatorschalter ermöglicht es, die Polarität des Kondensators schnell und problemlos zu wechseln.

Die ermittelten Steig- und Fallzeiten sind für 20 Tröpfchen aufzunehmen und tabelliert zu dokumentieren. Legen Sie zu diesem Zweck eine Tabelle an, in der Sie Spannung U , Fallzeit t_1 und -strecke s_1 sowie Steigzeit t_2 und -strecke s_2 , die ermittelten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 , den ermittelten Radius und die ermittelte Ladung – alles mitsamt Fehlern jedoch zunächst ohne Cunningham-Korrektur – eintragen. Erstellen Sie einen Graph für die Ladung Q als Funktion des Tröpfchenradius r , um Ihre Ergebnisse zu visualisieren. Führen Sie in einem zweiten Schritt die Cunningham-Korrektur durch. Erstellen Sie ebenfalls einen Graph für die Ladung Q als Funktion des Tröpfchenradius r mit den korrigierten Werten. Vergleichen Sie die korrigierten und die nicht korrigierten Ergebnisse. Geben Sie abschließend einen Mittelwert für e aus den korrigierten Ergebnissen Ihrer Einzelmessungen an, vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert und kommentieren Sie den Versuchsverlauf und Ihr Ergebnis in einer abschließenden Diskussion.

5 Umgang mit der Software

Starten Sie den Computer und schalten Sie alle Spannungsquellen ein. Öffnen Sie die 'Common Vision Blox Management Console', die sich auf dem Desktop befindet. Die folgende Frage, ob Änderungen durch dieses Programm am Computer vorgenommen werden dürfen, beantworten Sie mit 'Ja'. Öffnen Sie unter 'Tasks' die dritte Option 'GenICam', und dort den 'Device Configurator'. Sie müssen nun die Kamera suchen lassen indem Sie auf 'Discover' klicken. Wenn die Kamera gefunden wurde, klicken Sie auf die abgebildete Diskette, um die Einstellungen zu speichern. In der Regel muss die Kamera nach jedem Neustart des Computers neu gesucht werden.

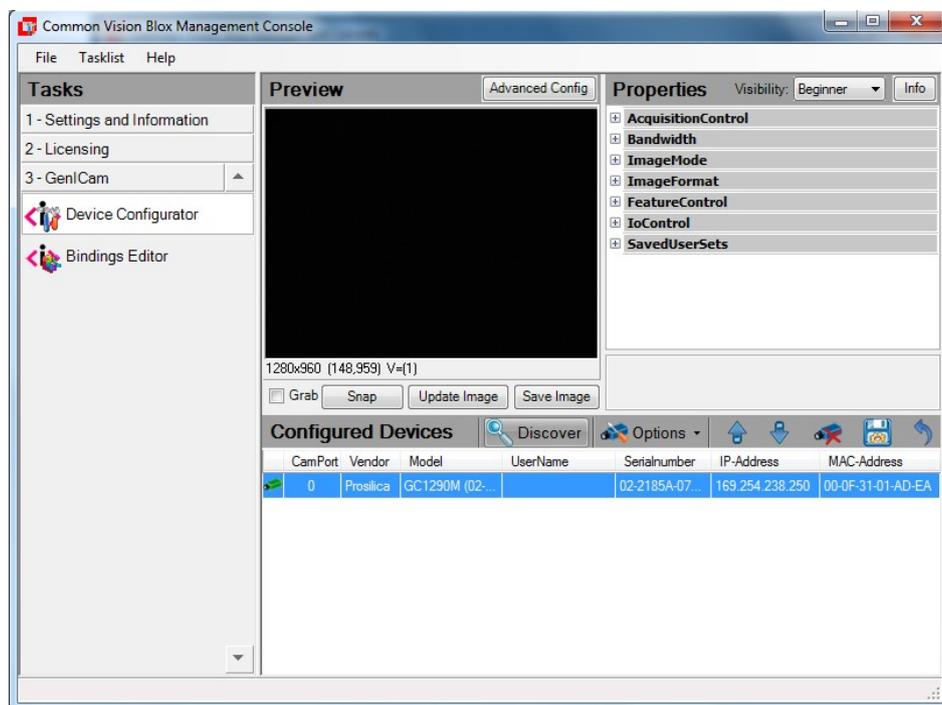


Abbildung 1: Screenshot der 'Common Vision Blox Management Console'

Nun schließen sie dieses Programm und öffnen das Programm 'MovieInteractive 2', welches sich ebenfalls auf dem Desktop befindet. Sie müssen zunächst die Kamera installieren. Öffnen Sie dazu mit einem Doppelklick die Option 'Video Interfaces', die sich unter der Rubrik 'Inputs' befindet, und wählen dort 'GenICam' mit einem Doppelklick aus. Aktivieren Sie die Option 'Grab'. Da die Beleuchtung relativ schwach ist, können Sie jedoch noch nicht allzu viel erkennen. Sie müssen nun geeignete Einstellungen wählen, die zum einen die Tröpfchen gut

erkennen lassen und zum anderen für die spätere Messung noch scharfe Bilder ergeben. Öffnen Sie dazu die Option 'GenICam'. In diesem Menü können Sie die Einstellungen der Kamera verändern. Für Ihre Messungen relevante Einstellungen sind:

- FeatureControl / ExposureTimeAbs (Belichtungszeit in ms)
- FeatureControl / GainRaw (Verstärkung von 0 – 24 dB)

Verändern Sie die Werte für die Belichtungszeit und für die Verstärkung. Je länger die Belichtungszeit ist, desto heller wird zwar das Bild, jedoch „verwischen“ die Bilder auch bei einer zu langen Belichtungszeit. Finden Sie eine geeignete Einstellung. Bitte verändern Sie keine anderen Werte als die oben angegebenen! Nachdem Sie die Einstellungen vorgenommen haben, schließen Sie das Fenster 'GenICam feature' wieder, da es ansonsten im Hintergrund weiter geöffnet bleibt.

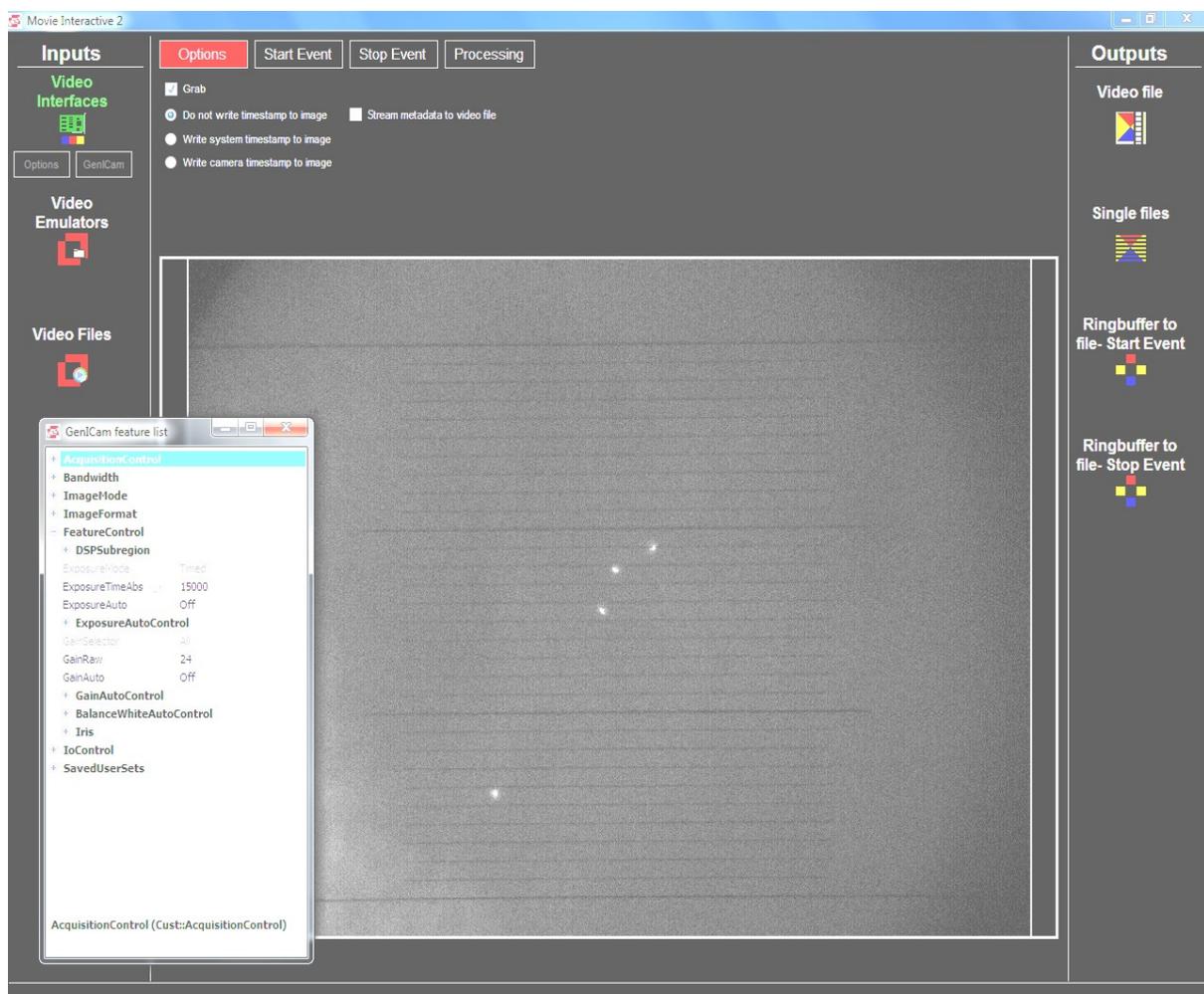


Abbildung 2: Screenshot des Programms MovieInteractive2

Um eine Messung durchzuführen, betätigen Sie zunächst mehrere Male relativ kräftig den Ölzerstäuber. Es dauert wenige Sekunden, bis Sie fallende Tröpfchen erkennen können. Verändern Sie gegebenenfalls die Spannung und korrigieren Sie permanent den Fokus des Mikroskops. Ob die beobachtbaren Tröpfchen geladen sind, erkennen Sie daran, ob sich die Fallbewegung ändert, sobald Sie die Spannung mithilfe des Kommutatorschalters umpolen. Häufig erkennt man gleichzeitig mehrere geladene Tröpfchen.

Um ein Video aufzuzeichnen, wählen Sie unter 'Outputs' die Option 'Video file'. Klicken Sie die Option 'filename to be used' an, um einen Speicherort und einen Dateinamen zu wählen. Legen Sie hierzu einen neuen Unterordner in dem Ordner „Millikan Messdaten“ an und geben der Datei einen Namen. ACHTUNG: Sie müssen für jedes neue Video einen neuen Dateinamen wählen, da sonst die alte Datei immer wieder überschrieben wird! Bestätigen Sie dann mit 'Apply and close'. Um die Aufnahme zu starten klicken Sie auf den grünen Balken mit 'Get Ready' und drücken anschließend eine beliebige Taste der Tastatur. Schieben Sie mithilfe der Maus das 'Waiting for a stop event'-Fenster gegebenenfalls aus dem Sichtbereich. Während die Aufnahme läuft, versuchen Sie, ein Öltröpfchen mindestens fünf mal über die Randmarkierungen der Mikrometerskala steigen und fallen zu lassen. Die Aufnahme stoppen sie wieder mit einer beliebigen Taste der Tastatur.

Um das Video auszuwerten, öffnen Sie es mit dem Programm 'VirtualDub'. Um das ganze Bild sehen zu können, klicken Sie die rechte Maustaste und wählen einen kleineren Zoom. Sie können das Fenster auch mit der linken Maustaste an die Bildschirmgröße anpassen. Um die Zeit zu ermitteln, die ein Tröpfchen für den gewählten Streckenabschnitt benötigt, gehen Sie wie im folgenden Beispiel erläutert vor. In Abbildung 3 sind zwei Bilder einer Videosequenz dargestellt. Sie zeigen ein Tröpfchen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, einmal an der oberen und einmal an der unteren Markierung.

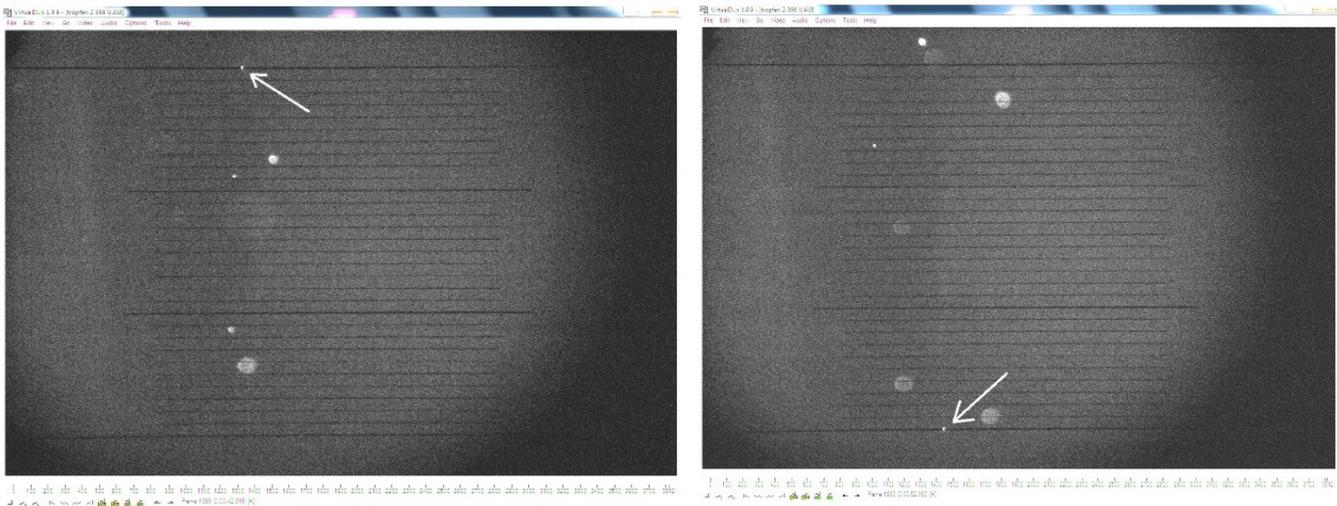


Abbildung 3: Zwei Ausschnitte einer Videosequenz, die ein Tröpfchen beim jeweiligen Passieren der oberen und der unteren Randmarkierungen zeigen.

Dem linken Bild ist die Bildnummer 1365 zugeordnet, dem rechten Bild die Nummer 1690. Das bedeutet, die Bilddifferenz beträgt $1690 - 1365 = 325$ Bilder. Bei einer Aufnahmegeschwindigkeit von 32,792 Bildern pro Sekunde errechnet sich die Laufzeit des Öltröpfchens für den definierten Streckenabschnitt durch:

$$\frac{325 \text{ Bilder}}{32,792 \frac{\text{Bilder}}{\text{sec}}} = 9,91 \text{ sec} .$$

Sie können auf dem Computer ein Tabellendokument erstellen, in dem Sie ihre Werte tabellarisch dokumentieren.

6 Literaturhinweise

Über das Millikan-Experiment ist in jedem Standardwerk der Experimentalphysik etwas zu finden. Wer sich eingehender mit den Forschungen Millikans beschäftigen möchte, dem ist dieser Artikel zu empfehlen, der über Suchmaschinen leicht gefunden werden kann:

Millikan, Robert Andrews (1911): The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stokes's Law, in: The American Physical Society: Physical Review (Series I). 1911, Volume 32, Issue 4, S. 349 - 397

Ebenfalls interessant ist dieses Buch von Millikan, das über die Universitätsbibliothek ausgeliehen werden kann:

Millikan, Robert Andrews (1922): Das Elektron. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.

7 Anhang

Berechnung des korrigierten Radius

Nach Gleichung (1) gilt:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})}{4g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})}} .$$

Setzt man nun für die Viskosität η die korrigierte Viskosität η_C ein, gilt:

$$\eta_C = \eta (1 + A_C \langle l \rangle / r_{\text{Korr}})^{-1}$$

$$\Rightarrow r_{\text{Korr}}^2 = \frac{9\eta}{4g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}}) \frac{1}{(1 + A_C \frac{\langle l \rangle}{r_{\text{Korr}}})}$$

$$\Leftrightarrow r_{\text{Korr}}^2 (1 + A_C \frac{\langle l \rangle}{r_{\text{Korr}}}) = \frac{9\eta}{4g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})$$

$$\Leftrightarrow r_{\text{Korr}}^2 + A_C r_{\text{Korr}} \langle l \rangle = \frac{9\eta}{4g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})$$

$$\Leftrightarrow r_{\text{Korr}} = -\left(\frac{A_C \langle l \rangle}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{A_C \langle l \rangle}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\eta}{g(\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}})} (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})} .$$

Die negative Lösung macht physikalisch keinen Sinn, von daher wurde sie vernachlässigt.

Berechnung der korrigierten Ladung

Aus Gleichung (2) ergibt sich für die Ladung:

$$Q = \frac{3\pi\eta r d}{U} (v_{\text{sink}} + v_{\text{steig}}) .$$

Setzt man für die Viskosität η wieder die korrigierte Viskosität η_C ein, gilt:

$$\eta_C = \eta (1 + A_C \langle l \rangle / r_{\text{Korr}})^{-1}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{3\pi\eta r_{\text{Korr}} d}{U} \left(1 + A_C \frac{\langle l \rangle}{r_{\text{Korr}}}\right)^{-1} (v_{\text{sink}} + v_{\text{steig}}) .$$