I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

Praktikum A

allgemeine Hilfen

Version vom 24. März 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Mittelwert und dessen Standardabweichung

Angenommen es liegen n Werte x_i einer Größe x mit gleicher Ungenauigkeit vor, also $\Delta x_i = \Delta x$ für alle i mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dann ergibt sich deren Mittelwert $\overline{x}$ wie folgt:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Als Fehler wird insbesondere im Zuge dieses Praktikums die Standardabweichung des Mittelwerts genutzt, nicht zu verwechseln mit der Standardabweichung einer Einzelmessung, deren Formel recht ähnlich ist, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Die relevante Formel der Standardabweichung des Mittelwerts, hier als $\Delta\overline{x}$ bezeichnet, lautet

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Sollte es vorkommen, dass für alle i gilt $\overline{x} = x_i$, so würde der Wert $\Delta\overline{x}$ verschwinden. In diesem Fall ist eine sinnvolle Alternative die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu nutzen, was zu $\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$ führt, da alle x_i die gleiche Ungenauigkeit Δx besitzen.

Ist der Mittelwert von nur zwei Werten x_1 und x_2 gesucht, so vereinfacht sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts drastisch und wir erhalten

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \& \qquad \Delta\overline{x} = \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|.$$

Häufig gilt $x_2 > x_1$, sodass $\Delta\overline{x} = \frac{x_2 - x_1}{2}$.

2 Gewichteter Mittelwert

Wie in Abschnitt 1 zum Mittelwert wird auch hier angenommen, es liegen n Werte x_i einer Größe x vor. Nun unterscheiden sich jedoch die Ungenauigkeiten Δx_i untereinander. In diesem Fall werden Wichtungsfaktoren benutzt, um die unterschiedlichen Genauigkeiten Δx_i zu berücksichtigen und die Werte x_i entsprechend zu gewichten. Die Formel für die Wichtungsfaktoren lautet

$$w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}.$$

Damit ergibt sich für den gewichteten Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}.$$

Die Berechnung der Ungenauigkeit $\Delta\overline{x}$ von $\overline{x}$ lässt sich aufteilen in die Berechnung eines internen und eines externen Teils. Die externe Berechnung entspricht der Standardabweichung des Mittelwerts, während die interne Berechnung der Gaußschen Fehlerfortpflanzung entspricht. Die Formeln lauten:

$$\Delta\overline{x}_{\text{extern}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}} \qquad \& \qquad \Delta\overline{x}_{\text{intern}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}}.$$

In der Anwendung werden beide Werte berechnet und der größere der beiden Werte ausgewählt.

3 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen x_i auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe y. Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von y mit dessen Ungenauigkeit Δy zu bestimmen. Der Wert y hängt von mehreren anderen Größen x_i ab, $y\left(x_1, x_2, x_3, \dots\right)$.

Alle Größen $x_1, x_2, x_3, \dots$ besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$. Dann ergibt sich Δy aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \dots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ partiellen Ableitungen von y nach einer Größe x_i entsprechen.

Ein Beispiel:
Um die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$ eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit t gestoppt, welche es für eine Strecke l benötigt. Beide Werte liegen vor: $l = (20{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ und $t = (2{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}$, also $v = \frac{20{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}2\,\mathrm{s}} \approx 9{,}0909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Fehlerformel lautet hier

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2}\Delta t\right)^2} && (1) \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\cdot\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t}\cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\
&= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. && (2)
\end{aligned}$$

Die Umformungen bis Gleichung (2) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (1) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte $\Delta v \approx 0{,}857\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich $v \pm \Delta v = (9{,}1 \pm 0{,}9)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx (33 \pm 3)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

4 Grafische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ einer Geradengleichung der Form $y = y(x) = a \cdot x + b$ bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare $(x_i | y_i)$ und deren Ungenauigkeiten Δx_i und/oder Δy_i in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die x_i- oder die y_i-Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen[1], sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet $^2/_3$ aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.
2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.
Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.
Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden $a_{\text{min/max}}$ und die y-Achsenabschnitte $b_{\text{min/max}}$ bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen Δx und Δy abgelesen. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus $a = \pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend $(+)$ oder fallend $(-)$ ist. Sollte eine Achse entgegen der Norm invertiert beschriftet sein, ist dies natürlich bei der Vorzeichenwahl zu berücksichtigen.
Die Werte $b_{\text{min/max}}$ können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung $b_{\text{min/max}} = y - a_{\text{min/max}} \cdot x$ bestimmt werden.

[1] In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Ungenauigkeiten der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta a = \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2}, \\
b &= \frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta b = \left| \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2} \right|.
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Allgemein müssten auch bei Δa Betragsstriche stehen. Da a_{min} und a_{max} jedoch in einer festen Relation stehen, ergibt sich für Δa automatisch ein positiver Wert.

Würde diese Gerade im Diagramm eingezeichnet werden, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig schneiden.

Ein Beispiel:

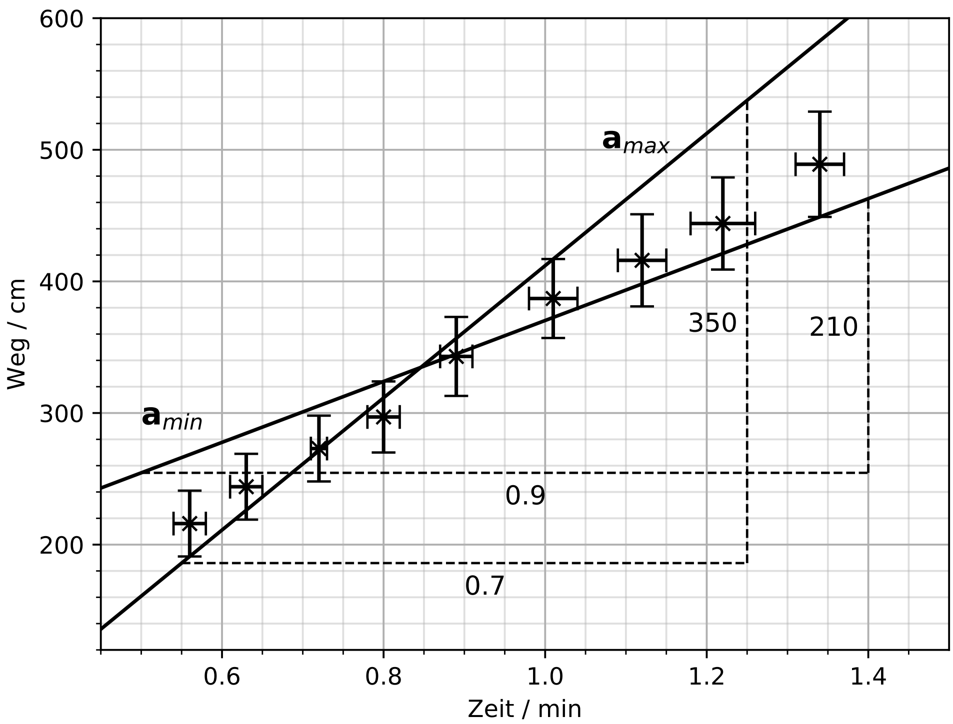

Abbildung 1: *Vollständige grafische Geradenanpassung. Extremalgeraden und Steigungsdreiecke sind eingezeichnet und beschriftet. Dazugehörige Rechnungen befinden sich im Text.*

In Abbildung 1 ist eine grafische Geradenanpassung mit neun Werten eines fiktiven Experiments und deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Es ist die zu den Daten gehörige Geschwindigkeit $v \pm \Delta v$ in $^{\text{m}}/_{\text{s}}$ gesucht.
Die Extremalgeraden werden jeweils durch das Schneiden von sechs Werten und deren Fehlerbalken/-flächen bestimmt, während die übrigen drei Werte möglichst noch im doppelten Fehlerabstand getroffen sind. Zur Berechnung der Steigungswerte werden die Stei-

gungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier

$$a_{\text{min}} = \frac{210\,\text{cm}}{0{,}9\,\text{min}} \approx 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad a_{\text{max}} = \frac{350\,\text{cm}}{0{,}7\,\text{min}} = 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

Da beide Geraden von links nach rechts steigen, haben sie positive Steigungswerte. Die y-Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden. Für dieses Beispiel wird für a_{min} bei $x = 0{,}6\,\text{min}$ und für a_{max} bei $x = 1{,}3\,\text{min}$ geschaut, sodass sich die beiden Punkte $(0{,}6\,|\,280)$ und $(1{,}3\,|\,560)$ ergeben. Die y-Achsenabschnitte sind dann

$$\begin{aligned} b_{\text{min}} &= 280\,\text{cm} - 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 0{,}6\,\text{min} &&\approx 140\,\text{cm}, \\ b_{\text{max}} &= 560\,\text{cm} - 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 1{,}3\,\text{min} &&= -90\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ anzuwenden und es ergibt sich

$$a \pm \Delta a = (366{,}665 \pm 133{,}335)\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad b \pm \Delta b = (25 \pm 115)\,\text{cm}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Steigungswerte nicht der gewünschten Angabe von Ergebnissen entspricht, da die Ergebnisse hier nicht signifikant gerundet sind! Diese genaueren Werte werden genutzt, um weitere Rechnungen durchzuführen, in diesem Fall also die Umrechnung in die gewünschten Einheiten.
Durch Umrechnung der Steigunsgwerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $v \approx (6{,}111 \pm 2{,}222) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also gerundet $v = (6{,}1 \pm 2{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5 Rechnerische Geradenanpassung

Die allgemeine Form einer Geradengleichung lautet

$$y = y\,(x) = a \cdot x + b.$$

Für einen Datensatz von Werten x_i und y_i $(i = 1, \ldots, N)$ lässt sich nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine entsprechende Geradengleichung finden. Anders ausgedrückt, es werden die Parameter a und b der Geraden so bestimmt, dass die Abweichungen zwischen den Werten und der Gerade minimal sind. Es ist sinnvoll für die Berechnung eigene Ausdrücke zu definieren:

$$\begin{aligned} [x] &= \sum_{i=1}^{N} x_i & \qquad [y] &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\ [xx] &= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \qquad [xy] &= \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i \end{aligned}$$

$$\Delta = N \cdot [xx] - [x] \cdot [x]$$

$$\Rightarrow \qquad a \quad = \quad \frac{N \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} \qquad \& \qquad b \quad = \quad \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta}.$$

Weiterhin ist es möglich, und in der Regel notwendig, die Ungenauigkeiten von a und b zu bestimmen, also die Werte Δa und Δb. Erneut werden passende Ausdrücke definiert:

$$(\Delta y)^2 \quad = \quad \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2 \qquad \text{für} \quad y(x_i) = a \cdot x_i + b$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta a \quad = \quad \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{N}{\Delta}} \qquad \& \qquad \Delta b \quad = \quad \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{[xx]}{\Delta}}.$$

6 Start-Stopp-Fehler

Der Start-Stopp-Fehler beschreibt die Messungenauigkeit einer Zeitmessung. Im Praktikum werden Zeitmessungen meist per Hand vorgenommen, deren Genauigkeit von der messenden Person abhängt. Der Fehler ergibt sich, wie der Name bereits impliziert, aus der Ungenauigkeit der Messung sowohl beim Starten als auch beim Stoppen der Messung.

In der Regel wird einfach die gestoppte Zeit t_{Stopp} als Messzeit t genutzt, also $t = t_{\text{Stopp}}$. Streng genommen ergibt sich diese allerdings aus $t = t_{\text{Stopp}} - t_{\text{Start}}$, wobei meistens $t_{\text{Start}} = 0$, für eine beliebige Einheit, gegeben ist.
Dieser Punkt ist bei der Betrachtung der Fehler relevant, da wie oben beschrieben beide Größen fehlerbehaftet sind. Durch Anwendung von Gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Start}}} \Delta t_{\text{Start}}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial t_{\text{Stopp}}} \Delta t_{\text{Stopp}}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-1 \cdot \Delta t_{\text{Start}})^2 + (1 \cdot \Delta t_{\text{Stopp}})^2} \\
&= \sqrt{\Delta t_{\text{Start}}{}^2 + \Delta t_{\text{Stopp}}{}^2}.
\end{aligned}$$

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass die Messungenauigkeiten beim Starten und Stoppen gleich sind, also $\Delta t_{\text{S}} = \Delta t_{\text{Start}} = \Delta t_{\text{Stopp}}$. Somit folgt

$$\Delta t \quad = \quad \sqrt{2 \cdot \Delta t_{\text{S}}{}^2} \quad = \quad \sqrt{2} \cdot \Delta t_{\text{S}}.$$

Die Reaktionszeit hängt von der die Messung durchführenden Person und den Umständen ab. Es ist wichtig zu unterscheiden, ob ein Ereignis völlig überraschend passiert oder ob die Messung gut vorhersehbar ist, wie zum Beispiel periodische Wiederholungen oder lineare (langsame) Bewegungen. Es ist realistisch bei vorhersehbaren Messungen eine tendenziell kleine Reaktionszeit zu wählen, welche die meisten Personen mit den gegebenen Bedingungen erreichen können, also beispielsweise $\Delta t_{\text{S}} = 0{,}1\,\text{s}$. Für diesen Wert ergibt sich schließlich $\Delta t \approx 0{,}14\,\text{s}$. Um einen eigenen Wert für Δt_{S} zu finden ist es also notwendig die Umstände des jeweiligen Versuchs und das eigene Reaktionsvermögen zu beurteilen. Sollten Sie zu der Einschätzung gelangen, eine andere Reaktionszeit zu benötigen, so passen Sie den Wert von Δt_{S} und entsprechend Δt an.

7 Runden von Ergebnissen

ACHTUNG: Das hier vorgestellte Verfahren zum Runden basiert auf einer Schreibweise von Zahlen, wie sie beispielsweise in der Messtechnik verwendet wird. Es ist allerdings *nicht überall gültig* und sollte hier nur auf das Praktikum bezogen werden.

Die korrekte Angabe von Ergebnissen, indem diese auf signifikante Stellen gerundet werden, gehört zur guten Form beim Praktikum. Es hilft die zulässige Genauigkeit von Messwerten zu finden, ohne eine größere Präzision vorzutäuschen. Das Gegenteil kann auch der Fall sein, indem eine höhere Genauigkeit vorliegt, als auf den ersten Blick erkennbar ist.

Ist ein Wert ohne Ungenauigkeit angegeben, so ist in dem entsprechenden Kontext von einem exakten Wert auszugehen. In der Praxis basieren jedoch alle Versuche auf Messwerten, welche eine Messungenauigkeit besitzen. Diese Ungenauigkeit eines Wertes, häufig als dessen Fehler bezeichnet, gibt Auskunft darüber wie genau der Wert selbst angegeben werden kann und sollte. Dennoch sind insbesondere bei großen Zahlen weitere, im jeweiligen Kontext sinnvolle Überlegungen notwendig.

Daumenregel

Die signifikante Stelle einer Ungenauigkeit u ist an der ersten Ziffer von links festzumachen, welche sich von 0 unterscheidet, mit Ausnahme einer 1 und einer 2, bei welchen jeweils eine weitere Stelle angegeben wird. Ein paar Beispiele von Werten für beliebige Einheiten, wobei jeweils signifikante Stellen markiert sind:

u ungerundet	**3**,1416	0,0**9**1627	0,00**27**614	**1,2**2805 $\cdot 10^9$
u gerundet	3	0,09	0,0028	1,2 $\cdot 10^9$

Diese Daumenregel basiert auf dem folgenden Verfahren zur Feststellung der Rundungsstelle: Die Rundungsstelle W (gerundet auf 1; 0,1; 0,01; etc.) ist gegeben durch

$$u/30 < W \leq u/3.$$

Beispielhaft an einem der oberen Werte, $u = 0{,}091627 \to 0{,}00305\ldots < W \leq 0{,}0305\ldots$, also $W = 0{,}01$ (Hundertstel). Der gerundete Wert von u ist dann 0,09, so wie oben angegeben.

Je nach Situation kann es sinnvoll sein, beispielsweise einen Wert wie 331,48 auf 330 oder sogar 331 zu runden, statt nur die erste Stelle zu beachten, wodurch sich hier $300 = 3 \cdot 10^2$ ergeben würde. Bei einem Wert wie $1{,}602176634 \cdot 10^7$ ist jedoch gegeben, dass dieser nicht als 16021766 gerundet werden sollte, sondern in einem der hohen Zehnerpotenz entsprechend sinnvollen Bereich, wie beispielsweise $1{,}6 \cdot 10^7$.

Der Messwert selbst wird entsprechend der Rundungsstelle W seiner gerundeten Ungenauigkeit u angegeben, also beispielsweise:

ungerundet	$66{,}85 \pm 7$	$66{,}85 \pm 0{,}9$	$66{,}85 \pm 0{,}13$	$4 \pm 0{,}07$	$5{,}217 \cdot 10^5 \pm 3 \cdot 10^3$
gerundet	67 ± 7	$66{,}9 \pm 0{,}9$	(unverändert)	$4{,}00 \pm 0{,}07$	$(522 \pm 3) \cdot 10^3$

Die Angabe von Ergebnissen sollte mit einer entsprechenden Genauigkeit erfolgen. Bei einem Zwischenergebnis ist es sinnvoll, dieses wie oben beschrieben anzugeben und gleichzeitig den genaueren Wert zu behalten, um damit weiterrechnen zu können, was sich fortpflanzende Ungenauigkeiten durch Runden minimiert.

8 Abschätzung von Messungenauigkeiten

Zu jedem Messwert existiert eine entsprechende Messungenauigkeit, welche den Gegebenheiten entsprechend abgeschätzt werden muss. Hier sind besonders wichtige Aspekte und Fragen gesammelt, welche bedacht werden sollten.

- **Wie einfach sind die Messwerte ablesbar?**
  Die Umstände der Messung können das Ablesen von Messwerten erschweren oder vereinfachen. Ist die abzulesende Skala oder Anzeige (teils) verdeckt? Gibt es einen großen Abstand zwischen Messstelle und Skala, wodurch Parallaxenfehler verstärkt werden? Gibt es beispielsweise Spiegel hinter der analogen Skala, mit welchen genau dieser Fehler minimiert werden kann? Ist die Anzeige nicht durchgehend ablesbar, sondern nur für kurze Momente? Diese Fragen sind praktisch bei jeder Messung und jedem Messgerät relevant, insbesondere aber bei analogen Messgeräten.

- **Wie groß sind die Skalenabstände?**
  Die Skala eines analogen Messgeräts beeinflusst die Genauigkeit beim Ablesen maßgeblich. Welche ist die kleinste Stelle eines Messwerts, die von der Skala angegeben wird? Ist es unter den jeweiligen Umständen möglich den Messwert noch genauer als den kleinsten Skalenabschnitt abzulesen oder sind die Skalenschritte kleiner als realistisch gemessen werden kann? Als reguläres Beispiel, wo dieser Aspekt zum Tragen kommt, sind analoge Messschieber zu nennen. Damit sind teils sehr präzise Messungen möglich, deren Ungenauigkeit im Bereich des kleinsten Skalenabstands der zusätzlichen Noniusskala liegt.

- **Liegen Informationen vom Hersteller vor?**
  Wenn die vom Hersteller des Messgeräts angegebene Genauigkeit vorliegt, lässt sich diese bei analogen Geräten als Orientierungshilfe oder bei elektronischen Geräten meistens direkt als Messungenauigkeit nutzen. Die entsprechenden Informationen sind meist bei elektronischen Messgeräten leichter verfügbar. So besitzt eine Sorte von im AP eingesetzten Digitalthermometern eine Auflösung von $0{,}1\,°\mathrm{C}$, die vom Hersteller angegebene Genauigkeit liegt jedoch bei $\pm 0{,}3\,°\mathrm{C}$ im Bereich von -20 bis $90\,°\mathrm{C}$ und bei $\pm 0{,}5\,°\mathrm{C}$ außerhalb.

- **Ist der Messwert eine Momentaufnahme oder zeitlich stabil?**
  Manche Werte verändern sich während der Messungen nicht oder nur sehr langsam, während andere mit hoher Frequenz fluktuieren. Ein Beispiel, wie es im Praktikum vorkommen könnte, ist eine Druckmessung, bei welcher sich der angezeigte Wert innerhalb von wenigen Sekunden mehrfach verändert. Ein dazu beispielhafter Wertebereich ist $1012{,}3$ bis $1013{,}9\,\mathrm{hPa}$, wobei mit einem Computer eine Momentaufnahme bei $1013{,}4\,\mathrm{hPa}$ erstellt wird. Trotz der Anzeige, welche scheinbar bis auf $0{,}1\,\mathrm{hPa}$ genaue Werte angibt, wäre eine ebenso klein abgeschätzte Messungenauigkeit unrealistisch.

- **Gibt es weitere (versuchsspezifische) Gegebenheiten zu beachten?**
  In jedem Fall können weitere Umstände existieren, welche eine Einschätzung der Messungenauigkeit beeinflussen. Ein Beispiel dafür ist der Start-Stopp-Fehler, da für diesen die Reaktionsgeschwindigkeit der messenden Person wichtig ist, welche wiederum von der Situation abhängt, also wie überraschend oder vorhersehbar die Zeitmessung ist.

9 Nonius

Beim Nonius handelt es sich um eine Skala zum genaueren Ablesen von Messgeräten. Am häufigsten ist eine Nonius-Skala wohl auf Messschiebern zu finden, das Prinzip ist jedoch auf andere Messgeräte übertragbar. Die Ablesegenauigkeit erhöht sich um eine Stelle gegenüber der normalen Skala, es existieren allerdings auch noch präzisere Varianten. Das Ablesen mit einem Nonius wird im Folgenden an zwei Beispielen erläutert.

Eine typische Form des Nonius ist in Abbildung 2 (a), (b) und (c) zu sehen.

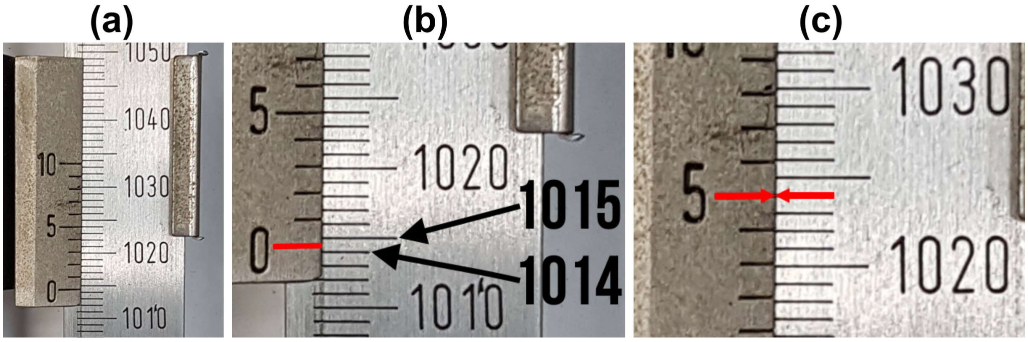

Abbildung 2: *Nonius-Skala am Beispiel eines Barometers. (a), (b) und (c) sind im Text erläutert.*

(a) Oft besteht ein Nonius aus 11 Strichen, welche den Ziffern von 0 bis 10 entsprechen. Fehlende Zahlen werden einfach in Gedanken ergänzt. Im Bild ist die normale Skala des Barometers in hPa rechts, die Nonius-Skala links.

(b) Zuerst ist der Strich der Null-Marke von Interesse, andere Markierungen des Nonius sind vorerst irrelevant. Dieser Strich wird an der normalen Skala abgelesen. Im Beispiel ist dies ein Wert zwischen 1014 hPa und 1015 hPa, also 1014,... hPa.

(c) Die nächst-genauere Stelle ist bestimmbar, indem der Strich auf der Nonius-Skala gesucht wird, der genau mit einem Strich der normalen Skala bündig ist. Der Wert der normalen Skala ist irrelevant, es zählt nur der Wert am Nonius. Im Beispiel ist die 4 des Nonius leicht über dem nächsten Strich auf der normalen Skala, die 6 hingegen leicht darunter. Die 5 ist genau bündig mit einem Strich. Damit gilt für den Druck hier 1014,5 hPa.

Es ist immer nur ein Strich des Nonius mit der anderen Skala bündig, mit Ausnahme der 0 und der 10, da diese nur gemeinsam bündig sind. In dem Fall gilt der Wert bei der 0 des Nonius.

Als zweites Beispiel dient ein Messschieber mit genauerem Nonius (Abb. 3). Die cm-Skala ist von Interesse. Die 0 des Nonius liegt zwischen 1,0 cm und 1,1 cm, also beginnt der genauere Wert mit 1,0... cm. Die bündige Nonius-Marke ist die zwischen 7 und 8, also lautet der genauer abgelesene Wert hier 1,075 cm = 10,75 mm.

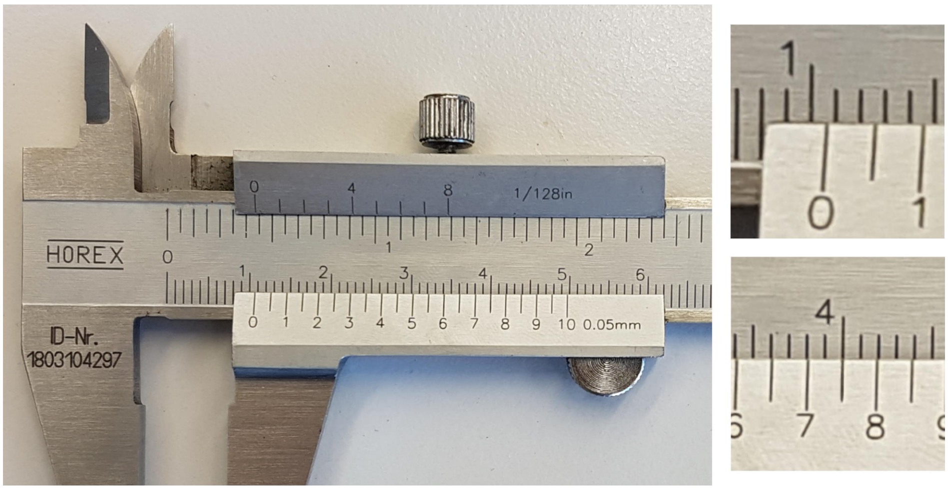

Abbildung 3: *Genauere Nonius-Skala am Beispiel eines Messschiebers. Relevante Bildausschnitte sind rechts vergrößert dargestellt.*

10 Messschraube

Die folgende Anleitung zur Bedienung einer Messschraube, inkl. der Abbildungen, entstammt überwiegend der Webseite von MW-Import, zu finden unter:
`https://www.mw-import.de/werkzeug/messschraube.html`[2].

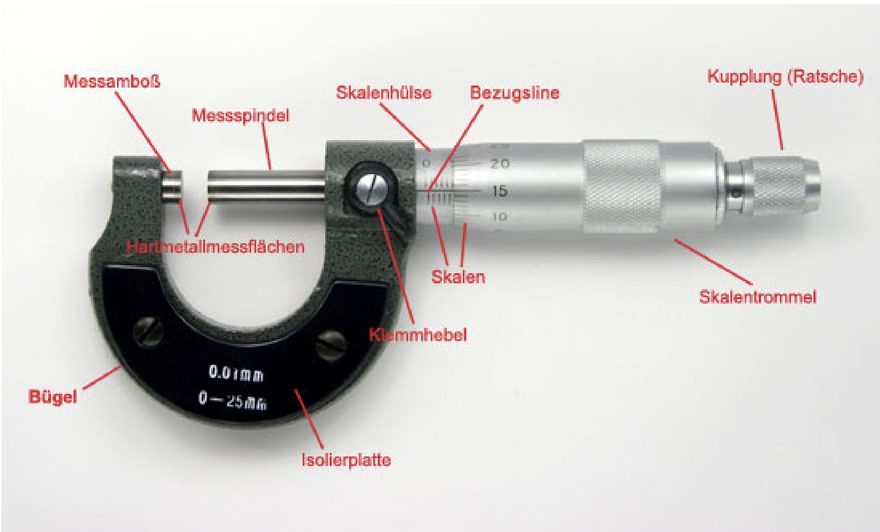

Abbildung 4: *Messschraube mit Markierungen und Bezeichnungen der einzelnen Teile.*

Richtiges Messen mit der Messschraube
Das zu messende Werkstück wird zwischen Amboss und Messspindel gehalten (vgl. Abb. 4). Um möglichst zuverlässige Messwerte zu erhalten, wird die Messspindel ohne Schwung mit der Kupplung (Ratsche) eingedreht. Die Kupplung hat die Aufgabe, die Messkraft auf 5–10 N zu begrenzen.
Der Bügel der Messschraube sollte bei der Messung nur an der Isolierplatte angefasst werden,

[2] Webseite abgerufen am 12. Juni 2020.

da die Handwärme das Messergebnis sonst verfälschen würde. Trotz der Isolierplatte kann die Handwärme zu einer Abweichung des Messergebnisses um bis zu 0,002 mm führen.

Richtiges Ablesen der Skala an der analogen Messschraube
Die Spindel der Messchraube hat üblicherweise eine Steigung von 0,5 mm. Bei einer Umdrehung der Skalentrommel wird die Messspindel axial um einen halben Millimeter gedreht. Auf der Skalentrommel sind 50 Teilstriche angebracht. Jeder Teilstrich entspricht demnach 0,01 mm. Auf der Skalenhülse sind oberhalb der Bezugslinie Teilstriche für die vollen Millimeter und unterhalb die Teilstriche für die halben Millimeter angebracht (vgl. Abb. 5).

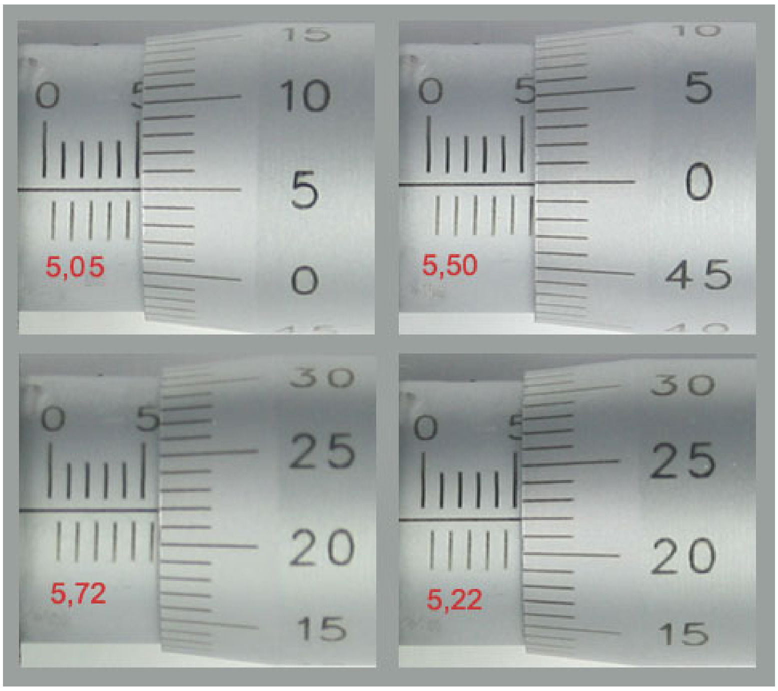

Abbildung 5: *Beispieleinstellungen der Messschraube inklusive der jeweiligen Ablesewerte.*