

I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

W9 - Strahlungsgesetze



PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 19. August 2020

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbereitung (zu Hause, vor dem Versuchstag)	2
2.1	Wärmetransport	2
2.2	Elektromagnetische Strahlung	4
2.3	Thermische Emission und Kirchhoffs Strahlungsgesetz	6
2.4	Schwarzkörperstrahlung	9
2.5	Thermoelektrizität	14
3	Versuchsaufbau	18
4	Benötigte Formeln	19
5	Durchführung (im Praktikum)	20
6	Auswertung (zu Hause)	23
6.1	Nachweis des Stefan-Boltzmann Gesetzes	23
6.1.1	Schwarze Würfelseite	25
6.1.2	Weißer Würfelseite	28
6.1.3	Spiegelnde Würfelseite	30
6.1.4	matte Würfelseite	32
6.2	Bestimmung der Emissivität	35
7	Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)	37
8	Anhang zur Fehlerrechnung	40
8.1	Graphische Geradenanpassung	40
8.2	Rechnerische Geradenanpassung	42
9	Literatur	43

1 Einleitung

In diesem Versuch werden Sie das Phänomen der Wärmestrahlung untersuchen und sich mit den physikalischen Gesetzmäßigkeiten um reale und ideale Strahler befassen, deren Erforschung maßgeblich zum Beginn der Epoche der modernen Physik beitrug. Der Versuch soll Ihnen die konzeptionellen Zusammenhänge zwischen der Temperatur eines Körpers und der durch ihn abgestrahlten elektromagnetischen Energie näherbringen und Sie mit den Begrifflichkeiten rund um die gängigen Strahlungsgesetze vertraut machen, insbesondere des Kirchhoffschen und des Planckschen Strahlungsgesetzes.

Beachten Sie bitte, dass die Lücken im Abschnitt 2 vollständig zu beantworten sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die Assistentin/der Assistent Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderliche Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums¹ vertraut gemacht haben.

Die Abgabe der Versuchsauswertung muss geordnet erfolgen, d. h. nicht als losen Blätterstapel, sondern bspw. getackert oder gelocht und geheftet. Sollte die Form der Abgabe keinen akzeptablen Kriterien entsprechen, kann die Auswertung verweigert werden. Versuchen Sie, bei der Bearbeitung der Aufgaben innerhalb der vorgegebenen Leerräume zu bleiben. Diese entsprechen meist dem Umfang, der an entsprechender Stelle erwartet wird. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein.

¹<https://teaching.astro.uni-koeln.de/AP>

2 Vorbereitung (zu Hause, vor dem Versuchstag)

2.1 Wärmetransport

Eine der großen Fragen der klassischen Physik war die nach der Natur der thermischen Wechselwirkung zwischen zwei Stoffen verschiedener Temperatur.

Aus der Thermodynamik (und natürlich der Alltagserfahrung) ist bekannt, dass zwei Körper unterschiedlicher Temperatur, die miteinander in Berührung stehen, in einer gewissen Zeit einer gemeinsamen Gleichgewichtstemperatur zustreben. Ein solcher direkter Austausch von Energieströmen zwischen beiden Körpern wird als **Wärmeleitung** bezeichnet.

Eine andere bekannte Form des Wärmetransports besteht in der sogenannten **Konvektion**, der Übertragung von Wärmeenergie durch einen Teilchenstrom von einem Reservoir auf ein anderes. Beide Varianten zeichnen sich dadurch aus, dass es zu einem mittelbaren oder unmittelbaren physischen Kontakt zwischen den beteiligten Stoffen kommt, der Übertragungsweg des Wärmetransportes ist also anschaulich nachvollziehbar.

Bei der **Wärmestrahlung**, dem letzten großen Transportmechanismus, ist es weniger offensichtlich. Es war schon früh klar, dass eine Übertragung von Wärme durch Sonnenlicht unabhängig vom Vorhandensein eines stofflichen Mediums (z.B. erwärmte Luftströme) möglich ist und eine Bestrahlung eines Objekts mit sichtbarem Licht zu einem Temperaturanstieg führt. In der Neuzeit wurde dann zusätzlich demonstriert, dass auch nicht-leuchtende, heiße Körper eine Form von Strahlung abgeben, mit der ein zweites Objekt erwärmt werden kann. Um 1800 kam es zu einer bedeutenden Entwicklung, als der Astronom Friedrich Wilhelm Herschel das Sonnenlicht mittels eines Prismas in der in Abb. 2.1 dargestellten Versuchsanordnung untersuchte. Herschel nutzte die lichtbrechenden Eigenschaften des Prismas, um die eingehenden Sonnenstrahlen in ihre farblichen Bestandteile, ihr sogenanntes Spektrum, zu zerlegen, und platzierte dann ein Thermometer in jedem Farbbereich. Mit dieser Frühform eines Spektrometers versuchte er, die Wärmeenergie der verschiedenen Farbkomponenten zu untersuchen, und gelangte dabei zu zwei Beobachtungen:

1. Die Temperatur nahm vom blauen zum roten Teil des Spektrums hin zu.¹
2. Der höchste gemessene Temperatur lag in einem Teil außerhalb des sichtbaren Regenbogens, jenseits des rötlichen Teils.

Damit hatte Herschel nicht nur nachgewiesen, dass das Spektrum der Sonne einen Anteil unsichtbarer Strahlung beinhaltet, sondern hatte auch ein erstes Indiz dafür, dass sich die-

¹Die Tatsache, dass Herschel für röteres Licht größere Temperaturen maß, ist ein Effekt der Dispersionskurve des Prismas und keine Eigenschaft des Lichts oder der Wärmestrahlung. Die Konsistenz des Temperaturanstiegs in den infraroten Bereich hinein zeigt jedoch, dass die Infrarotstrahlung dasselbe Brechungsverhalten aufweist wie das sichtbare Licht.

se Wärmestrahlung hinsichtlich ihrer optischen Eigenschaften ähnlich wie sichtbares Licht verhielt.

Er wurde damit einer der ersten Verfechter einer Idee, die heute als anerkannte physikalische Tatsache gilt, nämlich dass Licht- und Wärmestrahlung Teil eines gemeinsamen, allgemeineren Kontinuums sind. Dieses Kontinuum kennen wir heute als elektromagnetische Strahlung.

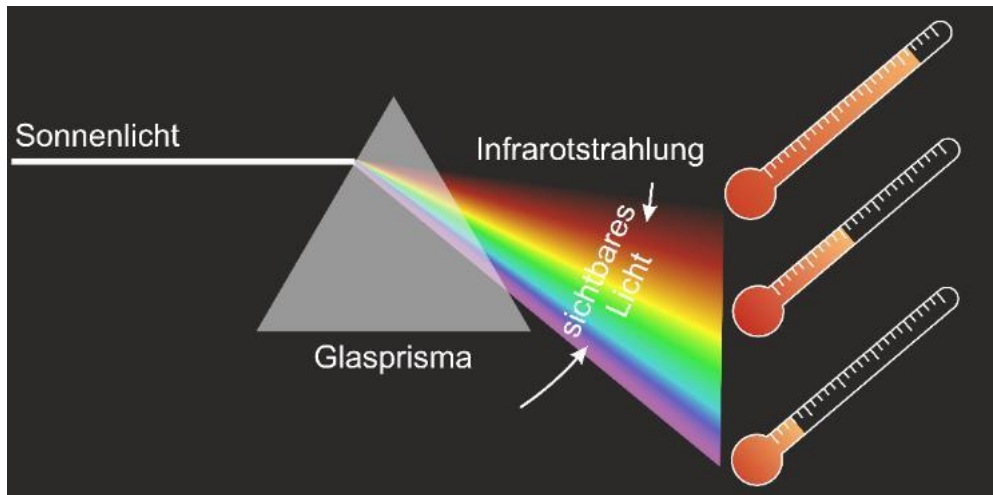


Abbildung 2.1: Die Abbildung zeigt den prinzipiellen Aufbau, den Herschel für sein Experiment benutzt hat. Das Prisma verteilt das blauere Licht über einen größeren Bereich als das röttere Licht. In Folge ist die am Thermometer eingehende Energiedichte geringer, weshalb für blau eine geringere Temperatur gemessen wurde und für die unsichtbare Infrarotstrahlung die höchste.

Fragen:

1. Die von Herschel beobachtete unsichtbare Strahlung wurde später Infrarotstrahlung (d.h. "unter rot"-Strahlung) getauft und gilt heute als Teil des elektromagnetischen Spektrums. Gibt es ein Gegenstück "über blau", also oberhalb der blauen Kante des sichtbaren Lichtes? Nennen Sie insgesamt drei Bereiche des elektromagnetischen Kontinuums.

2. In diesem Versuch werden Sie versuchen, die Wärmestrahlung eines Körpers zu messen. Sehen Sie sich den Versuchsaufbau, wie er in Abschnitt 3 dargestellt wird, an. Spielen die anderen beiden Transportmechanismen hier eine Rolle?

2.2 Elektromagnetische Strahlung

Die grundlegenden Effekte der klassischen Elektrodynamik werden durch die **Maxwell-Gleichungen** beschrieben. Insbesondere folgt aus dem Faradayschen Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

und Ampères Gesetz,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$

dass räumliche Änderungen des magnetischen Feldes \mathbf{B} und zeitliche Änderungen des elektrischen Feldes \mathbf{E} (und umgekehrt) zusammen auftreten. Elektrisches und magnetisches Feld sind also aneinander gekoppelt. Die Verbindung dieser beiden Gleichungen führt mit ein paar Handgriffen aus der Vektoralgebra auf eine Differentialgleichung für das elektrische Feld²:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \alpha_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Dies ist eine spezielle Instanz einer allgemeinen Form von Differentialgleichungen, die man **Wellengleichung** nennt. Sie erhält ihren Namen daher, dass ihre Lösung die mathematische Form einer Welle hat, d.h. einer Folge von Schwingungen, die sich in einer Richtung des Raumes ausbreiten. Eine besonders einfache Lösung der Wellengleichung ist durch sogenannte ebene Wellen gegeben. Ebene Wellen haben eine räumlich konstante Ausbreitungsrichtung, das heißt der Wellenvektor \mathbf{k} zeigt an jedem Punkt einer Wellenfront in dieselbe

²Eine DGL für das magnetische Feld lässt sich analog herleiten. Wir betrachten hier der Einfachheit halber nur die elektrische Komponente. Elektrisches und magnetisches Feld treten in einer EM-Welle allerdings **immer** gemeinsam auf.

Richtung. Wir betrachten den eindimensionalen Fall einer Welle, die in x-Richtung propagiert:

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx) \quad (2.4)$$

Eine solche Welle ist charakterisiert durch eine Amplitude E_0 , eine Ausbreitungsgeschwindigkeit v , eine Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und eine Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Es wurde nach der Entdeckung der elektromagnetischen Wellen insbesondere auch festgestellt, dass ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit v im Vakuum für alle Frequenzen konstant ist. Eine Konsequenz daraus ist, dass Wellenlänge und Frequenz der Welle in fester Beziehung zueinander stehen. Eine EM-Welle, die durch eine bestimmte Länge beschrieben wird, kann also vollkommen äquivalent über eine Frequenz identifiziert werden.

Fragen:

1. Wie nennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer EM-Welle üblicherweise und welchen Wert hat sie?

2. Wie ist die Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge konkret? Geben Sie die Formel an. Welcher Frequenz entspricht im Vakuum eine Wellenlänge von 500 nm?

3. Eine Welle, elektromagnetisch oder nicht, ist immer mit einer Form von Schwingung verbunden. Was genau schwingt bei einer EM-Welle?

4. Das EM-Kontinuum wird anhand der Frequenzen/Wellenlängen in zusammenhängende Bereiche, sogenannte Bänder, unterteilt. In welchen Wellenlängenbereich fällt das sichtbare Licht? Wie ist es mit Infrarot? Vergleichen sie die Bandbreite beider Bereiche.

5. Abbildung 2.2 zeigt die elektrische Komponente einer ebenen eindimensionalen Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt t . Welche Wellenlänge und Amplitude hat sie? Markieren Sie in der Abbildung, wo sie die jeweilige Größe ablesen können.

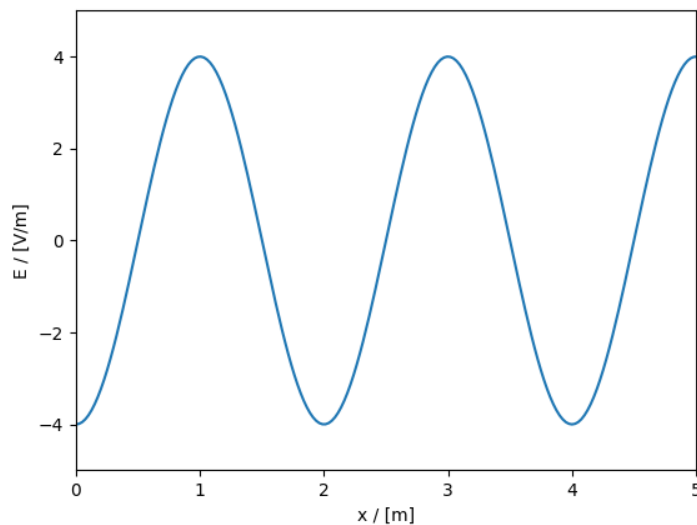


Abbildung 2.2

2.3 Thermische Emission und Kirchhoffs Strahlungsgesetz

Eine weitere Erkenntnis aus der Elektrodynamik besagt, dass eine beschleunigte Ladung elektromagnetische Wellen abstrahlt. Diese Einsicht führt uns zum Ursprung der elektromagnetischen Wärmestrahlung, die von einem Körper einer bestimmten Temperatur ausgesendet wird: Die Temperatur eines Körpers ist ein Maß für die in ihm gespeicherte thermische Energie, unter welcher wir üblicherweise die kinetische Energie der thermischen Bewegung der Atome und Moleküle verstehen. In Abhängigkeit von der Temperatur kommt es also im Körper zu kinetischen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen und in Folge zu Beschleunigungen der geladenen Protonen und Elektronen sowie zu Dipoloszillationen, die in der Ausstrahlung elektromagnetischer Energie resultieren.

Ein Körper der Temperatur T strahlt also eine gewisse elektromagnetische **Leistung** $P(T)$ ab, die im Allgemeinen auch richtungsabhängig ist. Wir gehen der Einfachheit halber von einem isotropen Strahler aus, d.h. der Körper strahlt seine Energie in alle Raumrichtungen gleichermaßen ab. Die genaue Abhängigkeit der Leistung von der Temperatur kennen wir

noch nicht, aber wir können schon ein paar Schlussfolgerungen über die Auswirkungen der Materialeigenschaften des Körpers auf P machen, indem wir ein thermodynamisches Gedankenexperiment bemühen.

Zunächst wissen wir aus der Alltagserfahrung, dass unterschiedliche Oberflächen auf sie einfallende Strahlung unterschiedlich gut absorbieren bzw. reflektieren. Eine matte Oberfläche reflektiert weniger Licht als eine spiegelnde, ein schwarzes Hemd erhitzt sich in der Sonne schneller als ein weißes etc. Wir quantifizieren diese Eigenschaft mittels eines **Absorptionsgrades** α , welcher implizit auch den Reflexionsgrad über $(1 - \alpha)$ definiert³. Ein Absorptionsgrad von 1 bedeutet, dass die gesamte einfallende Strahlung vollständig von der Oberfläche absorbiert wird. Einen solchen perfekten Absorber nennen wir 'schwarz', weil historisch in der Regel von der Absorption des sichtbaren Lichts gesprochen wurde. Im Allgemeinen ist der Absorptionsgrad jedoch abhängig von der betrachteten Wellenlänge, d.h. eine Oberfläche kann beispielsweise zwischen 450 und 750 nm weniger, aber im Infraroten mehr absorbieren.

Wir wollen nun zeigen, dass die Absorptionsfähigkeit der Oberfläche auch ein Maß für ihre Emissionsfähigkeit ist, also dass die von einem Körper abgestrahlte Leistung vom Absorptionsgrad abhängt. Nehmen wir den Fall zweier Körper an, die sich in einem abgeschlossenen⁴ Vakuum befinden und nur über ihre Strahlungswirkung Energie austauschen können. Beide Körper befinden sich im thermischen Gleichgewicht, haben also dieselbe Temperatur T , und emittieren Strahlungsleistungen P_1, P_2 . Die Oberflächen der Körper sind aus unterschiedlichen Materialien gemacht und weisen darum auch zwei unterschiedliche Absorptionsgrade α_1, α_2 auf. Die von Körper 1 aufgenommene Strahlungsleistung ist also $\alpha_1 P_2$. Die Strahlung, die der erste Körper emittiert, muss nun gleich der absorbierten Leistung sein:

$$P_1 = \alpha_1 P_2 \quad (2.5)$$

Dies ist zwingend erforderlich, andernfalls würde sich die Temperatur des ersten Körpers aus sich selbst heraus erhöhen und die Grundsätze der Thermodynamik wären verletzt. Die von 1 abgestrahlte Leistung ist also gemäß Gl. 2.5 proportional zu seinem eigenen Absorptionsgrad. Ein perfekter schwarzer Absorber würde dann im thermischen Gleichgewicht auch die größtmögliche Strahlungsleistung emittieren. Über diese Überlegung definieren wir den **Emissionsgrad** ϵ eines Körpers als das Verhältnis abgestrahlter Leistung zwischen dem Körper und einem perfekten schwarzen Absorber.

Nun denken wir uns eine zu unserem ursprünglichen Gedankenexperiment analoge Situation mit einem perfekten schwarzen Strahler (d.h. $\alpha = 1$) und einem gewöhnlichen Strahler und erhalten dann die Beziehung:

$$P = \alpha P_S \quad (2.6)$$

Aus der Definition des Emissionsgrades folgt somit unmittelbar

$$\epsilon = \alpha \quad (2.7)$$

³Unter der Annahme, dass der Transmissionsgrad 0 und der Körper also undurchsichtig ist.

⁴Wir gehen davon aus, dass die Wände des Vakuums perfekt verspiegelt sind und die gesamte Strahlungsleistung beim Empfänger ankommt. Diese Annahme lässt uns auf Überlegungen hinsichtlich der Strahlung in einen bestimmten Raumbereich verzichten und erspart uns etwas Schreibarbeit.

Unter dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz versteht man nun meist⁵ den durch Gleichung 2.7 beschriebenen Zusammenhang. Der Emissionsgrad und der Absorptionsgrad eines Körpers sind also gleich, insbesondere gilt für einen **idealen Schwarzkörper** auch $\epsilon = \alpha = 1$. Ein perfekter Absorber ist also auch ein perfekter Wärmestrahler.

Fragen:

1. Nehmen Sie an, ein Körper sitzt in einem abgeschlossenen Raum auf Umgebungstemperatur. Alle anderen Objekte in dem Raum, einschließlich der darin enthaltenen Luft, haben ebenso dieselbe Umgebungstemperatur. Sendet der Körper Wärmestrahlung aus? Warum?

2. Wie ist die physikalische Leistung definiert?

3. Ist der Emissionsgrad eines Körpers im infraroten Wellenlängenbereich im Allgemeinen gleich seinem Emissionsgrad im Bereich des sichtbaren Lichts? Begründen Sie.

4. Hat eine (optisch) weiße Oberfläche immer einen geringeren Absorptionsgrad als eine (optisch) schwarze?

⁵Die Verwendung ist nicht immer einheitlich, manchmal wird auch Gleichung 2.6 darunter verstanden.

5. Geben Sie die Definition des Emissionsgrades als Formel an.

6. In diesem Versuch werden sie die Emissionsgrade verschiedener Oberflächen untersuchen. Was für Größen müssten Sie kennen, um ϵ im Experiment zu bestimmen? Wie könnten Sie diese messen?

2.4 Schwarzkörperstrahlung

Wir kennen jetzt die Beziehung zwischen der abgestrahlten Leistung eines idealen schwarzen Strahlers und eines realen Strahlers. Was uns nun interessiert sind die Gesetze, welche die absolute Emission eines Schwarzkörpers beschreiben. Um hier einen Zugang zu finden, wollen wir uns die Charakteristiken eines perfekten Schwarzkörpers noch einmal vor Augen führen:

1. Alle eingehende Strahlung aller Wellenlängen wird vollständig absorbiert, es findet keine Reflektion an seiner Oberfläche statt.
2. Die gesamte aufgenommene Strahlungsenergie wird als Wärmestrahlung re-emittiert.
3. Die gesamte Strahlung verbleibt (bis zur Re-Emission als Wärmestrahlung) im Schwarzkörper. Es wird nichts transmittiert, d.h. der Körper ist komplett undurchsichtig.

Frühe experimentelle Behandlungen der idealen Schwarzkörper versuchten, diese durch sogenannte Hohlraumstrahler zu approximieren, um in Abhängigkeit ihrer Temperatur spektrale

Energieverteilungen wie in Abb. 2.3 dargestellt zu messen.

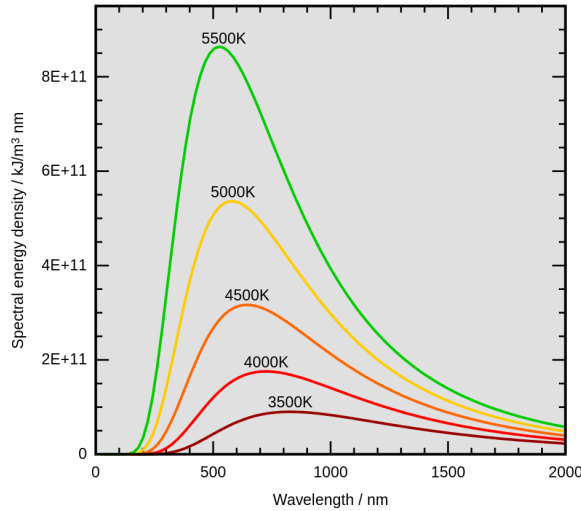


Abbildung 2.3: Spektrale Energieverteilung eines idealen Schwarzkörpers in Abhängigkeit seiner Wellenlänge und Temperatur.

Die hier abgebildete Beziehung zwischen spektraler Energiedichte, Wellenlänge (oder Frequenz, je nach Formulierung) und der Temperatur des schwarzen Strahlers wird durch das **Plancksche Strahlungsgesetz** beschrieben:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \quad (2.8)$$

Hier sind h das sogenannte Wirkungsquantum und k_B die Boltzmannkonstante. Plancks Gesetz steht am Ende eines langwierigen Erkenntnisprozesses im Wissenschaftsbetrieb des ausgehenden 19. Jahrhunderts und gibt nicht nur die Lösung eines mit den Mitteln der klassischen Physik nicht lösbaren thermodynamischen Problems vor, sondern markiert durch die Einführung der Quantenhypothese auch den Beginn der modernen Epoche der Physik.

Die Gleichung 2.8 basiert auf zwei früheren⁶ Ergebnissen, welche für sich genommen die empirisch ermittelten Zusammenhänge in bestimmten Wellenlängenbereichen korrekt wiedergeben, aber außerhalb dieser Bereiche von den experimentellen Beobachtungen abweichen. Die erste dieser Approximationen ist das **Rayleigh-Jeans** Gesetz:

$$B(\nu, T) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} k_B T \quad (2.9)$$

Sie gilt für den Fall niedriger Frequenzen bzw. hoher Wellenlängen. Die Rayleigh-Jeans Näherung fußt auf Überlegungen aus der klassischen Physik, nach denen

⁶Das Wirkungsquantum h kommt in der ursprünglichen Formulierung von Wien nicht in der Form vor. Die dort enthaltene Konstante wurde erst rückwirkend mit Plancks Zahl identifiziert.

Energien kontinuierliche Werte annehmen können und es folglich eine unendliche Anzahl an Frequenzen gibt auf denen ein Strahler emittieren kann. Dies führt in der Summe zu einer Energiedichte, die bei Integration über alle Frequenzen hinweg auf eine unendliche abgestrahlte Emissionsleistung führt. Da wir ja aber bereits wissen, dass die emittierte Leistung endlich sein muss, ist dieser Ansatz offensichtlich unphysikalisch, auch wenn mathematisch damit für niedrige Frequenzen ein korrektes Ergebnis produziert wird.

Qualitativ deutlich besser wird der schwarze Strahler dann durch **Wiens Strahlungsgesetz** beschrieben:

$$B(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{\frac{-h\nu}{k_B T}} \quad (2.10)$$

Das Wiensche Strahlungsgesetz reproduziert die in Abb. 2.3 gezeigten Kurven der Form nach richtig, weicht aber für hohe Frequenzen von den Messergebnissen ab. Aufbauend auf den beiden Teilgesetzen gelang es Planck durch das Postulat diskreter Energiepakete eine Beschreibung zu finden, die für alle Frequenzbereiche gültig ist.⁷

Auf Wien geht auch das nach ihm benannte **Verschiebungsgesetz** zurück:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (2.11)$$

Dabei ist b eine Proportionalitätskonstante.

Das Wiensche Verschiebungsgesetz gibt die Wellenlänge (oder Frequenz⁸) der größten Energiedichte an. In anderen Worten: Das Gesetz beschreibt, wie der Peak der in Abb. 2.3 gezeigten Planckkurven sich in Abhängigkeit der Temperatur nach rechts oder links verschiebt.

Gleichung 2.8 beschreibt die Strahlungsflussdichte in einen unendlich kleinen Raumwinkel auf einem infinitesimalen Frequenzintervall. Wir sind nun aber in unserem Experiment vorrangig an der von unserem Empfänger gemessenen Leistung über alle Frequenzen insgesamt interessiert und hätten gerne einen Ausdruck, der diese Leistung mit der Temperatur des Strahlers in Verbindung bringt. Eine Integration von Plancks Gesetz über die relevanten Größen führt auf das **Stefan-Boltzmann Gesetz**⁹:

$$P = \sigma AT^4 \quad (2.12)$$

Dies ist die Formel, mit welcher Sie in diesem Experiment die Emissionsgrade bestimmen werden.

⁷Beide Näherungen lassen sich unter den entsprechenden Annahmen über die betrachteten Frequenzen aus Plancks Formel herleiten und werden auch heute noch verwendet, um mathematische Beschreibungen in bestimmten Bereichen zu vereinfachen.

⁸Wiens Verschiebungsgesetz liefert sehr unterschiedliche Resultate, je nachdem ob man das Plancksche Strahlungsgesetz über Wellenlänge oder Frequenz formuliert. Die qualitative Aussage, dass sich das Maximum mit fallenden Temperaturen zu höheren Wellenlängen verschiebt, bleibt jedoch gleich.

⁹Aus didaktischen Gründen steht das Stefan-Boltzmann Gesetz am Ende dieses Abschnitts, historisch gesehen aber war es das erste der hier erläuterten Gesetze und gab den Anstoß für die weiteren Entwicklungen, die zur Quantenhypothese führten.

Fragen:

1. Gl. 2.8 gibt die spektrale Energiedichte eines idealen Schwarzkörpers an. In welchen Einheiten wird diese angegeben?¹⁰

2. Was besagt die Quantenhypothese? Welchen Wert und welche Einheit hat das Wirkungsquantum h ?

3. In Plancks Strahlungsgesetz kommt der Ausdruck $h\nu$ vor. Sie werden feststellen, dass die zusammengesetzten Einheiten eine Energie beschreiben. Um was für eine Energie handelt es sich?

4. Mit welchem Ansatz kann man Wiens Verschiebungsgesetz aus Gl. 2.8 herleiten?

5. In Gl. 2.11 kommt die Konstante b vor. Welchen Wert hat sie?

¹⁰Das Plancksche Strahlungsgesetz wird teilweise in verschiedenen Formen angegeben. In manchen Experimentalphysiklehrbüchern werden Sie das Gesetz eher mit einem zusätzlichen Faktor von $\frac{4\pi}{c}$ finden, wohingegen Gl. 2.8 der in der Astrophysik üblichen Konvention folgt. Der Unterschied besteht darin, dass der Raumwinkel in der astrophysikalischen Variante noch nicht ausintegriert wurde. Die Einheiten der spektralen Energiedichte unterscheiden sich entsprechend je nach betrachteter Formulierung des Gesetzes.

6. Berechnen Sie mit Hilfe des Wienschen Verschiebungsgesetzes diejenige Wellenlänge, bei welcher a) ein Topf kochendes Wasser ($T \approx 100^\circ\text{C}$) und b) ein Topf Wasser auf Raumtemperatur ($T \approx 20^\circ\text{C}$) jeweils die größte Strahlungsleistung emittiert. Übertragen Sie dazu die Temperaturen zunächst von der Celsius- auf die Kelvin-Skala, bevor Sie sie in die Formel einsetzen. Was müssen Sie zur Umrechnung tun? In welchem Bereich des elektromagnetischen Kontinuums befinden sich die beiden Maxima?

Vergleichen Sie dies nun die Photosphäre der Sonne mit einer Temperatur von $\approx 5500\text{ K}$. In welchem Bereich befindet sich ihr Strahlungsmaximum?

7. Ordnen sie auf der folgenden Abbildung die dargestellten Kurven den Gesetzen von Planck, Rayleigh-Jeans und Wien zu.

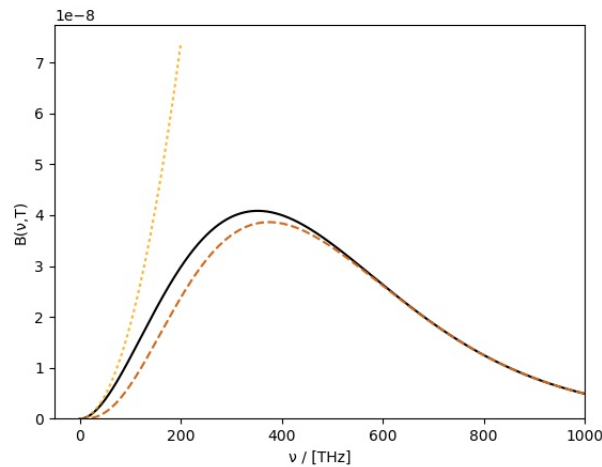


Abbildung 2.4

8. Das Stefan-Boltzmann Gesetz kann aus dem Planckschen Strahlungsgesetz durch Integration unmittelbar hergeleitet werden. Worüber muss integriert werden?

9. Konkret werden Sie in diesem Experiment das Stefan-Boltzmann Gesetz in folgender Form nutzen:

$$P - P_0 = \sigma A(T^4 - T_{Raum}^4) \quad (2.13)$$

P ist die Leistung des Strahlers, T seine absolute Temperatur und T_{Raum} die absolute Umgebungstemperatur. Was ist P_0 ?

10. Wie funktioniert ein Hohlraumstrahler und warum muss man auf so eine Konstruktion zurückgreifen, um eine gute Näherung für einen idealen Schwarzkörper zu konstruieren? Warum schwärzt man nicht einfach eine Oberfläche z.B. mit Ruß?

2.5 Thermoelektrizität

In diesem Versuch werden sie eine **Thermosäule** verwenden, um die Strahlung ihrer Wärmequelle zu messen. Ein solches Instrument basiert konzeptionell auf den Prinzipien der Thermoelektrizität, über die wir hier einen kurzen Überblick geben wollen.

Ein Leiter im physikalischen Sinn ist, in einfachen Worten, ein Festkörper, dessen äußerste Elektronen hinreichend schwach an die Atomrümpfe gebunden sind, dass sie sich innerhalb der kristallinen Struktur des Festkörpers nahezu ungehindert bewegen und somit zum Ladungstransport beitragen können. Wir nennen solche Elektronen quasifrei und können sie in erster Näherung durch die Idee des freien Elektronengases beschreiben, welches die Elektronen als Wolke aus Teilchen unter bestimmten Annahmen in Analogie zum idealen Gas

mit Mitteln der kinetischen Gastheorie behandelt. Eine solche Beschreibung führt mittels der Boltzmannschen Transportgleichung für einen linearen Leiter auf den Ausdruck:

$$E = \frac{j}{\sigma} + Q \frac{dT}{dz} - \frac{1}{e} \frac{d\mu}{dz} \quad (2.14)$$

Hierbei sei z die Koordinate längs des Leiters, j die Stromdichte, σ die elektrische spezifische Leitfähigkeit, Q der Betrag der Elementarladung, μ das elektrochemische Potential des Metalls und T seine Temperatur.

Für den Spezialfall räumlich entlang des Leiters konstanter Temperaturen und chemischer Potentiale erhält man aus Gl. 2.17 den Ausdruck $j = \sigma E$, eine Formulierung des ohmschen Gesetzes. Die anderen beiden Terme beschreiben die entstehenden Ströme beim Auftreten eines Temperaturgefälles (Thermospannung) und von Differenzen im chemischen Potential, wie sie zum Beispiel entstehen, wenn zwei verschiedene Metalle miteinander in Berührung gebracht werden (Kontaktspannung).

Einem Thermostrom liegt ein Diffusionsprozess der Ladungsträger zugrunde. Angenommen wir hätten einen linearen Leiter aus einem einzigen Metall, dessen Enden wir jeweils auf konstante Temperaturen T_1 und T_2 bringen, wobei $T_2 > T_1$. Entlang des Leiters wird sich nun ein Temperaturgradient $\frac{dT}{dz}$ einstellen, und folglich auch ein Gradient der kinetischen Energien der Elektronen im Leiter. Die Elektronen, die dem heißen Ende des Leiters am nächsten sind, haben eine höhere kinetische Energie und diffundieren in die benachbarten Bereiche mit Elektronen geringerer Energie, so dass hier ein Ladungstransport stattfindet und durch die Anhäufung der Elektronen zwischen den beiden Enden eine Thermospannung aufgebaut wird, die dem Diffusionsstrom entgegenwirkt. Im stationären Fall¹¹, in welchem der Diffusionsprozess und das entgegenwirkende Feld sich gerade kompensieren, fließt entsprechend kein Strom ($j = 0$) und Gl. 2.17 wird zu

$$E = Q \frac{dT}{dz} - \frac{1}{e} \frac{d\mu}{dz} \quad (2.15)$$

Integration über dz führt auf

$$\begin{aligned} \int_{z_2}^{z_1} E dz &= \int_{T_2}^{T_1} Q dT - \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{e} d\mu \\ \implies U_{21} &\approx -Q(T_2 - T_1) + \frac{1}{e}(\mu(T_2) - \mu(T_1)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei im letzten Schritt die Näherung verwendet wurde, dass die Temperaturabhängigkeit des Koeffizienten Q vernachlässigbar gering ist. U_{21} ist hier die auftretende Thermospannung zwischen den beiden Leiterenden.

Eine technische Anwendung dieses **thermoelektrischen Effekts** besteht in den sogenannten **Thermoelementen**, die benutzt werden, um mittels Spannungsmessungen sehr empfindlich Temperaturen bestimmen zu können. Gemäß Gl. 2.16 führen Temperaturgradienten

¹¹Es findet immer ein Austausch von Elektronen zwischen beiden Seiten statt. Der stationäre Fall bedeutet, dass im Mittel durch die Überlagerung von Diffusionsstrom und gegenwirkendem Feld kein Ladungstransport stattfindet, auch wenn einzelne Ladungsträger sich immer noch von einem Ende zum anderen bewegen. Dies wird als "dynamisches Gleichgewicht" bezeichnet.

über einem Leitermaterial zum Aufbau einer Spannung, die zum Temperaturgefälle proportional ist. Diese Spannung ist so allerdings nicht direkt messbar, da bei Hinzuschaltung eines Spannungsmessers an den Kontakten des Messgeräts zusätzliche Kontakt- und Thermospannungen auftreten, die das ursprüngliche Signal überlagern. Man löst dieses Problem, indem man ein zweites Leitermaterial mit hinreichend verschiedenem μ in die Schaltung einbringt wie in Abb. 2.5 dargestellt.

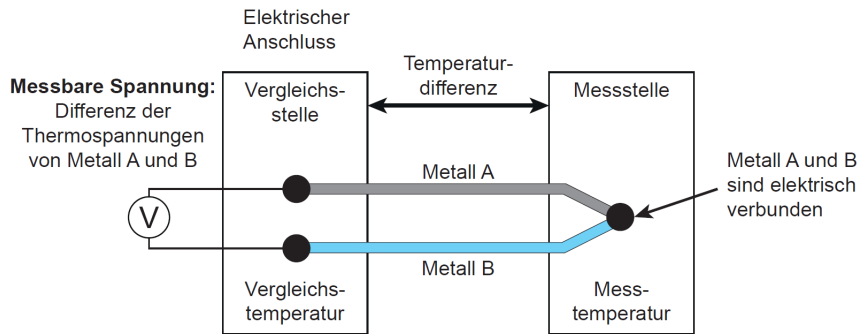


Abbildung 2.5: Prinzipieller Aufbau eines Thermoelements.

Metall A und B werden an der Messstelle, die auf der zu messenden Temperatur T_2 liegt, in Kontakt gebracht. Die anderen Enden der beiden Metalle liegen auf einer bekannten Referenztemperatur T_1 . Zu messen ist nun die Spannung zwischen den beiden freien Kontakten, welche mit einem Voltmeter abgegriffen werden kann.

Es treten zwischen den Materialien auf beiden Seiten Thermo- und Kontaktspannungen auf, welche einander entgegenwirken, so dass nach Bildung der entsprechenden Differenzen Gl. 2.16 auf folgenden Ausdruck führt:

$$U_{21} \approx (Q_B - Q_A) \cdot (T_2 - T_1) \quad (2.17)$$

Diese Gleichung beschreibt den sogenannten **Seebeck-Effekt**, und die materialabhängigen Koeffizienten Q werden entsprechend Seebeckkoeffizienten oder Thermokräfte genannt.

Fragen:

1. In was für Einheiten werden Thermokraftkoeffizienten angegeben?

2. Welche Vorteile hat es, eine Temperatur über eine elektrische Spannung zu messen?

3. Was unterscheidet eine Thermosäule von einem Thermoelement?

4. Was genau messen Sie mit der Thermosäule in diesem Experiment?

3 Versuchsaufbau

Als strahlender Körper wird in diesem Experiment ein Leslie-Würfel verwendet, der mit heißem Wasser gefüllt ist. Die Seiten dieses Würfels besitzen unterschiedliche Oberflächen: Eine Seite ist schwarz, eine weiß, eine verspiegelt und eine matt. Aufgabe ist es, die Wärmestrahlung jeder dieser Würfelseiten für verschiedene Temperaturen zu messen.

Dazu verwenden wir folgende Anordnung (siehe Abb. 3.1): Der Leslie-Würfel wird mit kochendem Wasser gefüllt und mit einer Würfelseite senkrecht zur Thermosäule ausgerichtet. Die Thermosäule wandelt die auftreffende Wärmestrahlung in elektrische Spannung um, die verstärkt wird und am Voltmeter abgelesen werden kann. Die elektrische Spannung ist dabei proportional zur Wärmestrahlung. Zur Bestimmung der Wärmestrahlung des umgebenden Raumes dient eine Abschirmplatte, die zwischen Leslie-Würfel und Thermosäule positioniert wird. Die Temperatur des Leslie-Würfels wird am Thermometer abgelesen, das im Deckel des Würfels steckt.

Da die Thermosäule sehr empfindlich ist und auch kleinste Änderungen registriert, befindet sich der gesamte Aufbau in einer Kiste, die Störungen durch Bewegung, Zugluft und Wärmestrahlung der Praktikanten abmildern soll.

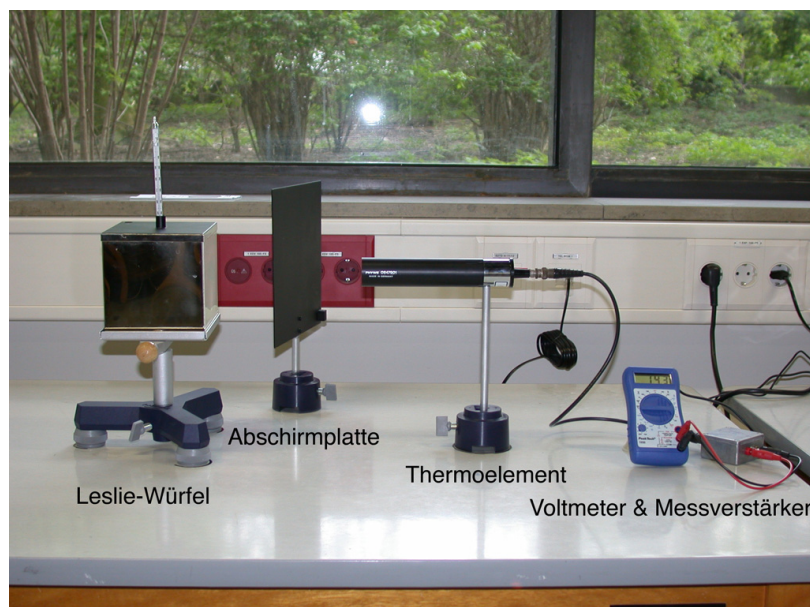


Abbildung 3.1: Foto des Versuchsaufbaus.

4 Benötigte Formeln

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz gibt die thermische Strahlungsleistung P eines schwarzen Körpers der Fläche A als Funktion seiner absoluten Temperatur T an. Es lautet:

$$P = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (4.1)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten σ . Die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers ist somit proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur, $P \sim T^4$.

Emittiert ein Körper mehr Strahlung, als er absorbiert, dann kühlt er dadurch ab; absorbiert er mehr als er emittiert, dann wärmt er sich auf. Im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung absorbiert und emittiert der Körper im gleichen Ausmaß.

Um die Nettostrahlungsleistung eines Körpers der Temperatur T zu erhalten, muss demnach die Strahlung der Umgebung P_0 bei der Temperatur T_r mit berücksichtigt werden. Die Nettostrahlungsleistung ergibt sich durch:

$$P - P_0 = \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_r^4) \quad (4.2)$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Allgemeine Hinweise:

Bei diesem Versuch werden Sie mit kochendem Wasser arbeiten. Gehen Sie entsprechend vorsichtig vor, um sich und ihre Mitpraktikanten vor Verletzungen zu schützen. Achten Sie auf einen angemessenen Sicherheitsabstand zwischen Wasser und elektronischen Geräten, insbesondere den Stromleisten. Sollten Teile der Elektronik sichtbar beschädigt sein, brechen sie den Versuch ab und kontaktieren Sie ihren Versuchsassistenten, ebenso bei ernsthaften Verletzungen durch z.B. heißes Wasser.

Obwohl der Aufbau zur Abmilderung äußerer Störungen in eine Kiste eingebaut ist, ist er trotzdem noch sehr empfindlich. Halten Sie deshalb Fenster und Türen während der gesamten Messung geschlossen und vermeiden Sie jegliche Art von Zugluft.

Die schwarze Platte zur Bestimmung der Wärmestrahlung der Umgebung muss für die Messungen der Würfelseiten aus der Kiste entfernt werden.

Verwenden Sie das Thermometer mit der feineren Skala für die Bestimmung der Raumtemperatur T_r . Stecken Sie das Thermometer mit der gröberen Skala in den Leslie-Würfel zur Bestimmung der Wassertemperatur T_w .

Insgesamt sollen 10 Messreihen durchgeführt werden. Während jeder Messreihe werden jeweils die Spannung für die schwarze Platte (U_0), die Wassertemperatur (T_{wasser}) und die Spannungen für alle vier Würfelseiten (U_{schwarz} , $U_{\text{weiß}}$, U_{matt} und $U_{\text{spiegelnd}}$) gemessen und protokolliert. Die gesamte Durchführung des Versuchs lässt sich in zwei Teile gliedern. Im ersten Teil werden 5 Messreihen mit kochendem Wasser durchgeführt. Für den zweiten Teil kühlt man den Würfel durch Zugabe von kaltem Leitungswasser etwas ab. Danach werden die restlichen 5 Messreihen analog zum ersten Teil gemacht.

Teil 1:

1. Füllen Sie den Leslie-Würfel zu $3/4$ mit kochendem Wasser. Es muss dann etwa eine Minute gewartet werden, bis sich eventuelle Temperaturunterschiede ausgeglichen haben.
2. Schalten Sie das Voltmeter und den dazugehörigen elektronischen Verstärker ein, und stellen Sie die Thermosäule in etwa 15 cm Abstand vor den Würfel. Achten Sie darauf, dass die Würfelseite während der Messungen senkrecht zur Thermosäule ausgerichtet ist. Schätzen Sie den Messfehler ΔU ab und tragen Sie den Wert in Ihr Protokoll ein.
3. Lesen Sie zu Beginn der Messungen die Raumtemperatur T_r ab und notieren Sie diese.

4. Zur Nullpunktbestimmung (U_0) positionieren Sie die schwarze Abschirmplatte zwischen Leslie-Würfel und Thermosäule.
5. Bestimmen Sie nun nacheinander für alle vier Seiten des Würfels die Spannungen U_{schwarz} , $U_{\text{weiß}}$, U_{matt} und $U_{\text{spiegelnd}}$ über die Thermosäule. Protokollieren Sie die Wassertemperatur T_w für jede Würfelseite einzeln, da sich die Temperatur zu Anfang sehr schnell verändert. Beachten Sie außerdem, dass die Messelektronik eine Zeitkonstante besitzt, d.h. der Wert darf nach dem Drehen des Würfels erst nach ca. 20 sec. abgelesen werden.
6. Warten Sie, bis sich die Wassertemperatur um 2 bis 3 K verringert hat. Dann wiederholen Sie die letzten beiden Arbeitsschritte (Bestimmung von U_0 und U_i und Protokollierung der Wassertemperatur für $i =$ alle Seiten des Würfels), insgesamt 5 mal.

Teil 2:

1. Geben Sie so viel kaltes Wasser in den Leslie-Würfel, bis er komplett gefüllt ist.
2. Warten Sie nach Zugabe des Wassers etwa 30 sec., und wiederholen Sie die Messung der verschiedenen Würfelseiten 5 mal. Auch hier sollten Sie zwischen den einzelnen Messreihen warten, bis sich das Wasser um etwa 2 bis 3 K abgekühlt hat.
3. Lesen Sie am Ende der Messungen noch ein zweites Mal die Raumtemperatur ab. Verwenden Sie für die Auswertung dann den Mittelwert der beiden Werte.

Tragen Sie alle Messwerte in Tabelle 5.1 ein und lassen Sie es von Ihrem Versuchsassistenten abzeichnen. Beachten Sie, dass nur vollständige Protokolle abgezeichnet werden. Schalten Sie nach Abschluss des Versuchs alle Geräte aus (Voltmeter!) und räumen Sie den Versuchsaufbau auf. Das Wasser sollte zu diesem Zeitpunkt bereits lauwarm sein, so dass Sie es ohne Probleme aus dem Würfel abgießen können sollten. Falls dem nicht so ist, warten Sie bis es sich weiter abgekühlt hat. Nehmen Sie auf keinen Fall den Würfel in die Hand, solange er mit noch heißem Wasser gefüllt ist.

Notieren Sie sich auch eine Fehlerabschätzung auf alle gemessenen Größen¹:

$$\Delta U_0[mV] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta U[mV] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta T_r[^\circ C] = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta T_w[^\circ C] = \underline{\hspace{2cm}}$$

¹Benutzen Sie den Ablesefehler des Messgeräts als Schätzwert für den Fehler. Für gleiche Messinstrumente (z.b. Thermometer mit denselben Skaleneinteilungen) sollten sie daher auch die gleichen Fehler annehmen.

Nr.	Raum		schwarz		weiß		matt		spiegelnd	
	U_0 [mV]	T_r [°C]	T_w^{schw} [°C]	U_{schw} [mV]	T_w^w [°C]	U_w [mV]	T_w^m [°C]	U_m [mV]	T_w^{sp} [°C]	U_{sp} [mV]
1										
2		—								
3		—								
4		—								
5		—								
6		—								
7		—								
8		—								
9		—								
10										

Tabelle 5.1: Tabelle für die Messwerte

AT:

(Datum)

(Unterschrift des Betreuers)

6 Auswertung (zu Hause)

6.1 Nachweis des Stefan-Boltzmann Gesetzes

Als Erstes sollen Sie überprüfen, ob ihre Messdaten das Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. 4.2) bestätigen.

Bei der Versuchsdurchführung haben Sie für jede Temperatur der vier Seiten des Würfels eine korrespondierende Spannung mit der Thermosäule gemessen. Das Stefan-Boltzmann Gesetz ist zwar für eine Leistung formuliert, aber die Spannung, die Sie mit der Thermosäule messen, ist dieser proportional. Es gilt also $(U_w - U_0) \propto (T_w^4 - T_r^4)$, wir erwarten für unsere Messwerte entsprechend einen linearen Verlauf.

Graphisch aufgetragen sollten die Wertepaare dann mathematisch folgender Form entsprechen:

$$(U_w - U_0) = a \cdot (T_w^4 - T_r^4) + b \tag{6.1}$$

Es handelt sich also um eine Geradengleichung, wie man sie allgemeiner in der Form $y = a \cdot x + b$ kennt. Um nun zu prüfen, ob dieser lineare Zusammenhang auch tatsächlich vorliegt, müssen Sie den Graphen ihrer Messdaten zeichnen.

Was müssen Sie auf der Abszisse des Plots eintragen?

Was müssen Sie auf der Ordinate des Plots eintragen?

Wie nennt man man die Größen a,b in einer Geradengleichung im Allgemeinen?

Welche Einheiten werden a und b in unserem speziellen Fall haben?

Zu ihren gemessenen Werten für U_w , U_0 , T_w und T_0 haben Sie jeweils eine Fehlerabschätzung notiert. Wenn Sie ihre Größen nun auf die in Gl. 6.1 gezeigte Form bringen, müssen diese Fehler entsprechend konvertiert werden.

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Fehler einer Funktion, die auf fehlerbehafteten Größen basiert, und den einzelnen Fehlern wird durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschrieben:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i^n (\Delta x_i \frac{\partial y}{\partial x_i})^2} \quad (6.2)$$

Angewandt auf $(U_w - U_0)$ ergibt sich

$$\Delta(U_w - U_0) = \sqrt{\Delta U_w^2 + \Delta U_0^2} \quad (6.3)$$

Schreiben Sie die einzelnen Schritte auf, die aus Gl. 6.2 auf Gl. 6.3 führen:

Wie lautet die entsprechende Fehlerformel für ΔT^4 ?

Zeigen Sie, dass damit für $\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ folgt:

$$\Delta(T_w^4 - T_r^4) = \sqrt{(4T_w^3 \Delta T_w)^2 + (4T_r^3 \Delta T_r)^2} \quad (6.4)$$

Notieren Sie die Wertepaare samt der zugehörigen Fehler in den Tabellen 6.1 - 6.4 und plotten sie die entsprechenden Punkte auf dem vorgedruckten Milimeterpapier. Beschriften Sie die Achsen und zeichnen Sie die Fehlerbalken mit ein.

Führen Sie für die schwarze, die weiße und die reflektierende Seite eine **graphische** Geradenanpassung durch und für die matte Seite eine **rechnerische** Geradenanpassung. Einzelheiten zur Durchführung entnehmen Sie dem jeweiligen Abschnitt und dem Anhang.

Notieren Sie abschließend die aus ihren Geradenanpassungen ermittelten Steigungen in Tabelle 6.5.

6.1.1 Schwarze Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K ⁴]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K ⁴]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabelle 6.1: Werte für die schwarze Würfelseite

Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch. Zeichnen Sie dazu zwei Ausgleichsgeraden in das Diagramm, so dass Sie möglichst genau $2/3$ der Datenpunkte innerhalb der Fehlerbalken treffen **und** gleichzeitig jeweils eine Gerade die Steigung möglichst einmal maximiert und einmal minimiert. Es sollte also nicht möglich sein, eine Gerade zu finden, die, wenn sie auch $2/3$ der Werte trifft, eine größere Steigung hat als die maximierende Ausgleichsgerade, und analog keine Gerade mit einer geringeren Steigung als der minimierenden Ausgleichsgeraden.

Notieren Sie die Steigungen Ihrer minimierenden und maximierenden Ausgleichsgeraden, a_{min} und a_{max} . Berechnen Sie dann die Steigung a ihrer mittleren Ausgleichsgeraden als Mittelwert von a_{min} und a_{max} , zusammen mit dem Fehler dieses Mittelwerts. Zeichnen Sie abschließend die mittlere Ausgleichsgerade ein. ¹

$$a_{min} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a_{max} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(6.5)

Geben Sie für alle berechneten Werte immer auch die Einheiten an.

¹Dazu müssen Sie auch den Achsenabschnitt b der mittleren Ausgleichsgerade ermitteln. Eine Erklärung dazu finden Sie im Anhang. Es ist nicht nötig die Werte für b hier anzugeben, es genügt wenn Sie die resultierende Gerade zeichnen.

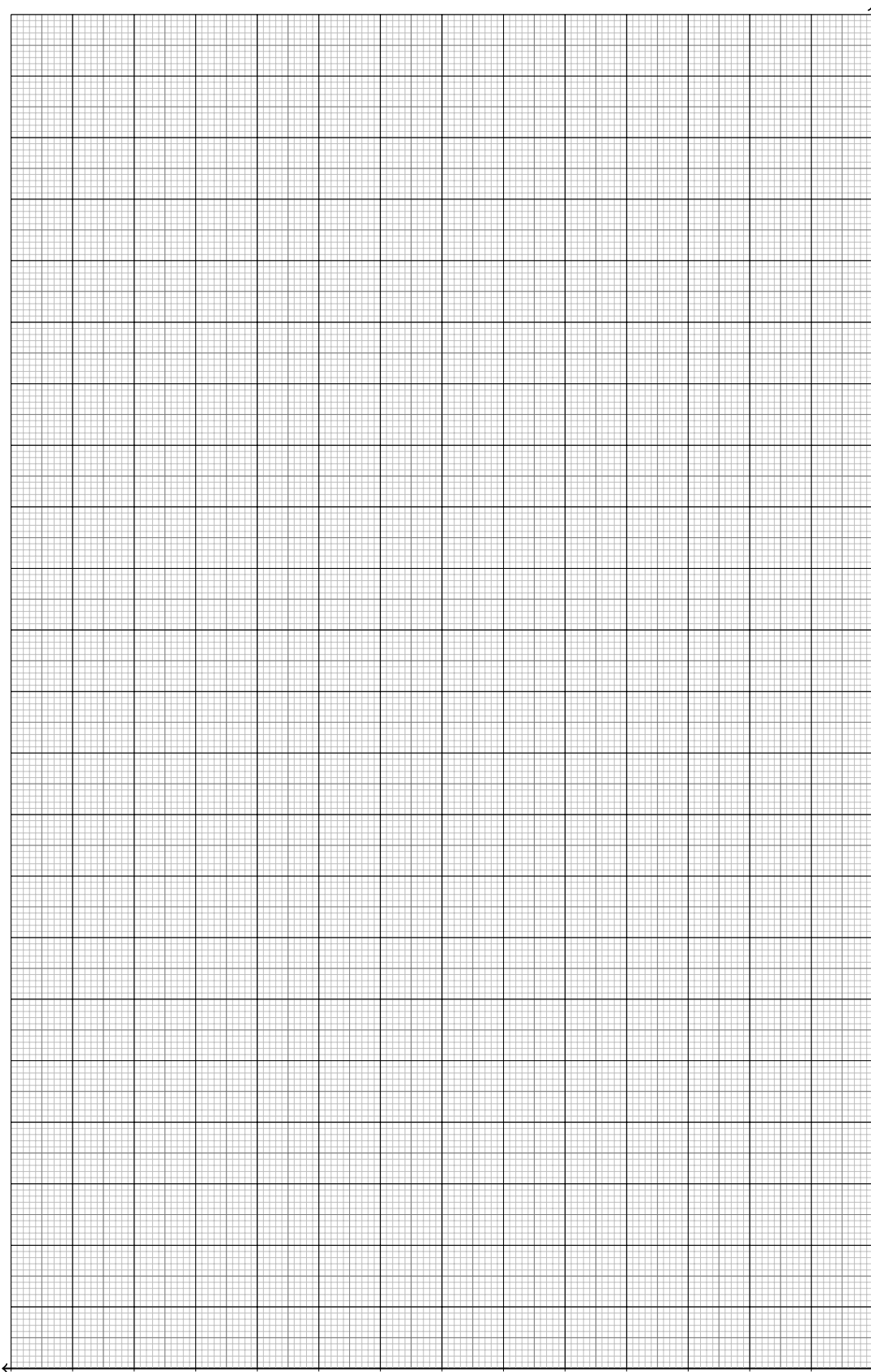


Abbildung 6.1: Diagramm für die schwarze Würfelseite

6.1.2 Weiße Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K ⁴]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K ⁴]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabelle 6.2: Werte für die weiße Würfelseite

$$a_{min} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a_{max} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(6.6)

Geben Sie für alle berechneten Werte immer auch die Einheiten an.

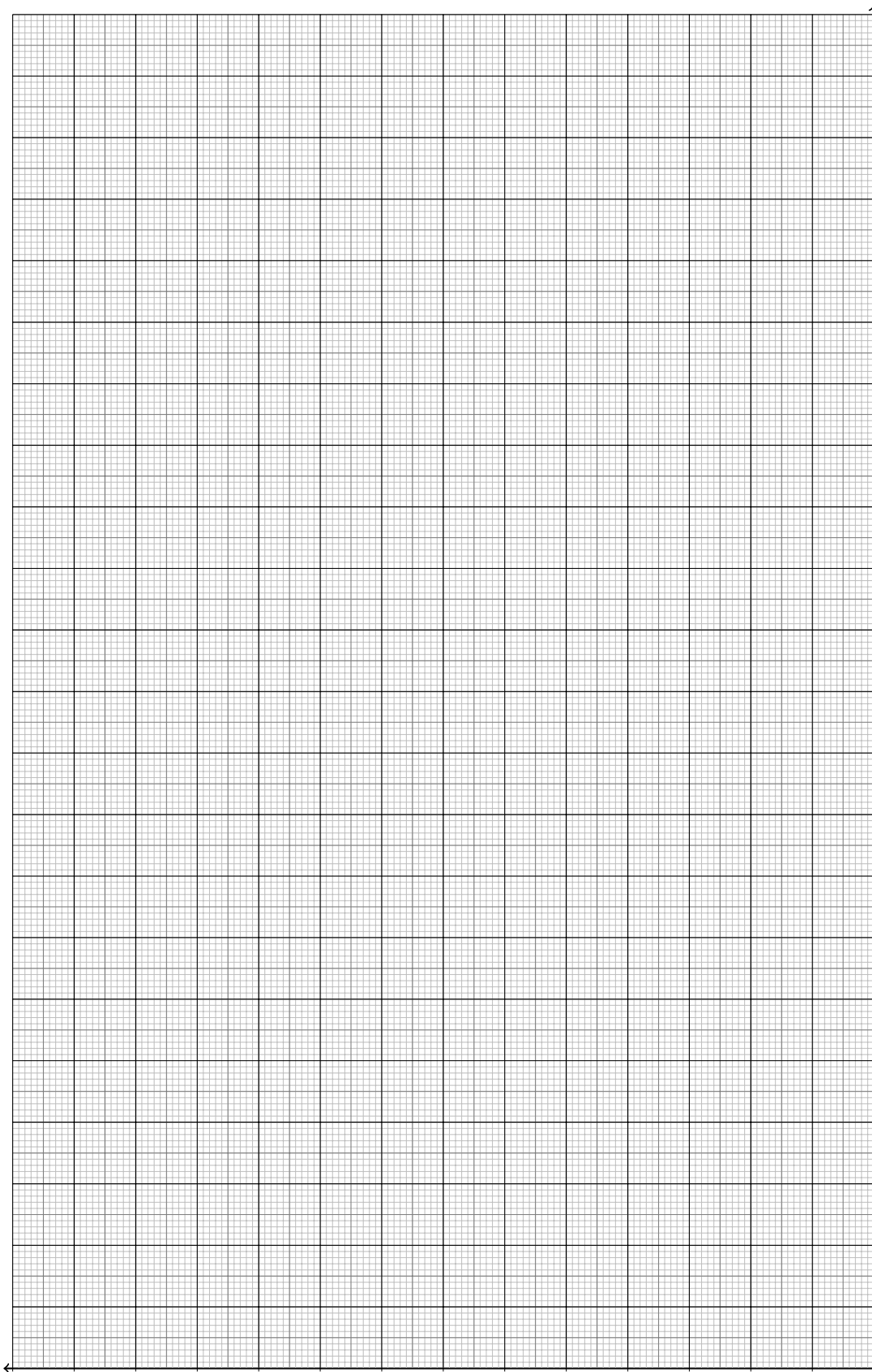


Abbildung 6.2: Diagramm für die spiegelnde Würfelseite

6.1.3 Spiegelnde Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K ⁴]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K ⁴]
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabelle 6.3: Werte für die spiegelnde Würfelseite

$$a_{min} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a_{max} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a = \frac{a_{max} + a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(6.7)

Geben Sie für alle berechneten Werte immer auch die Einheiten an.

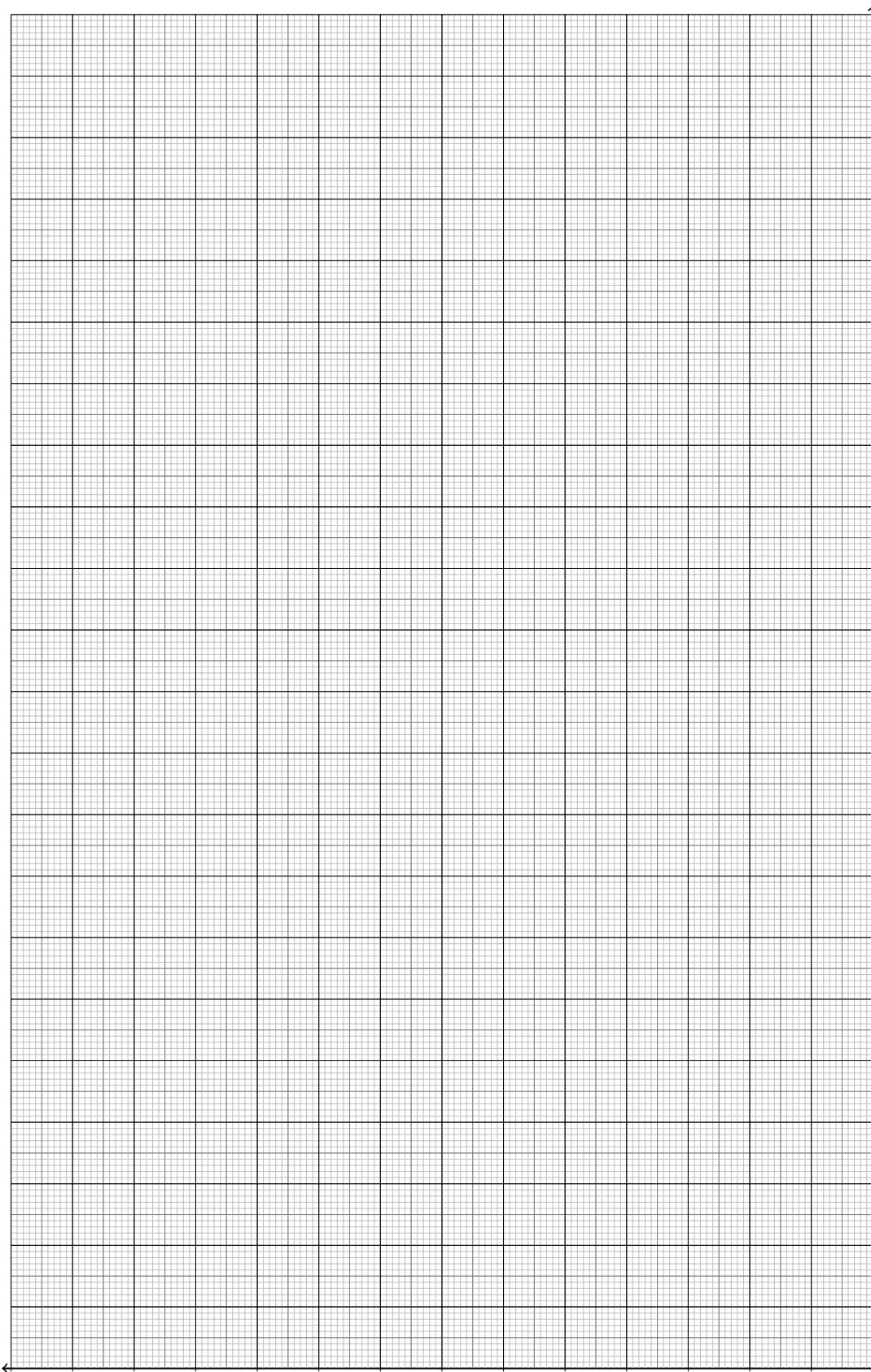


Abbildung 6.3: Diagramm für die spiegelnde Würfelseite

6.1.4 matte Würfelseite

#	$U_w - U_0$ [mV]	$\Delta(U_w - U_0)$ [mV]	$T_w^4 - T_r^4$ [K ⁴]	$\Delta(T_w^4 - T_r^4)$ [K ⁴]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Tabelle 6.4: Werte für die matte Würfelseite

Führen Sie eine rechnerische Geradenanpassung² durch, wie sie in Abschnitt 8.2 beschrieben wird. Zeigen Sie in den dafür angegebenen Lücken, wie die Definitionen für [x], [y], [xx],[yy] und [xy], die Sie im Anhang finden, auf die Messwerte anzuwenden sind.

Notieren Sie die Zwischenergebnisse und die Steigung der ermittelten Ausgleichsgeraden hier. Zeichnen Sie die rechnerisch bestimmte Ausgleichsgerade für Ihre n=10 Wertepaare in das Diagramm.

Sie müssen für diese Würfelseite **keine** minimale und maximale Ausgleichsgerade einzeichnen!

²Es wird **dringend** empfohlen, die rechnerische Geradenanpassung mithilfe eines der gängigen Tabellenkalkulationsprogramme durchzuführen, um unnötige Fehler und zeitraubende Berechnungen zu vermeiden.

$$[T_w^4 - T_r^4] = \sum_i^N \text{_____} = \text{_____}$$

$$[U_w - U_0] = \sum_i^N \text{_____} = \text{_____}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)] = \sum_i^N \text{_____} = \text{_____}$$

$$[(U_w - U_0)(U_w - U_0)] = \sum_i^N \text{_____} = \text{_____}$$

$$[(T_w^4 - T_r^4)(U_w - U_0)] = \sum_i^N \text{_____} = \text{_____}$$

$$\Delta = N \cdot [(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)] - [T_w^4 - T_r^4] \cdot [T_w^4 - T_r^4] = \text{_____}$$

$$a = \text{_____} = \text{_____}$$

$$b = \text{_____} = \text{_____}$$

Mit der so berechneten Geradengleichung der Form $(U_w - U_0) = f(T_w^4 - T_r^4) = a \cdot (T_w^4 - T_r^4) + b$ können Sie den Fehler auf a (und b) berechnen:

$$(\Delta(U_w - U_0))^2 = \frac{1}{N - 2} \sum_i^N ((a \cdot (T_w^4 - T_r^4)_i + b) - (T_w^4 - T_r^4)_i)^2 = \text{_____}$$

$$\implies \Delta a = \sqrt{(\Delta(U_w - U_0))^2 \frac{N}{\Delta}} = \text{_____}$$

$$\Delta b = \sqrt{(\Delta(U_w - U_0))^2 \frac{[(T_w^4 - T_r^4)(T_w^4 - T_r^4)]}{\Delta}} = \text{_____}$$

Geben Sie für alle berechneten Werte immer auch die Einheiten an.

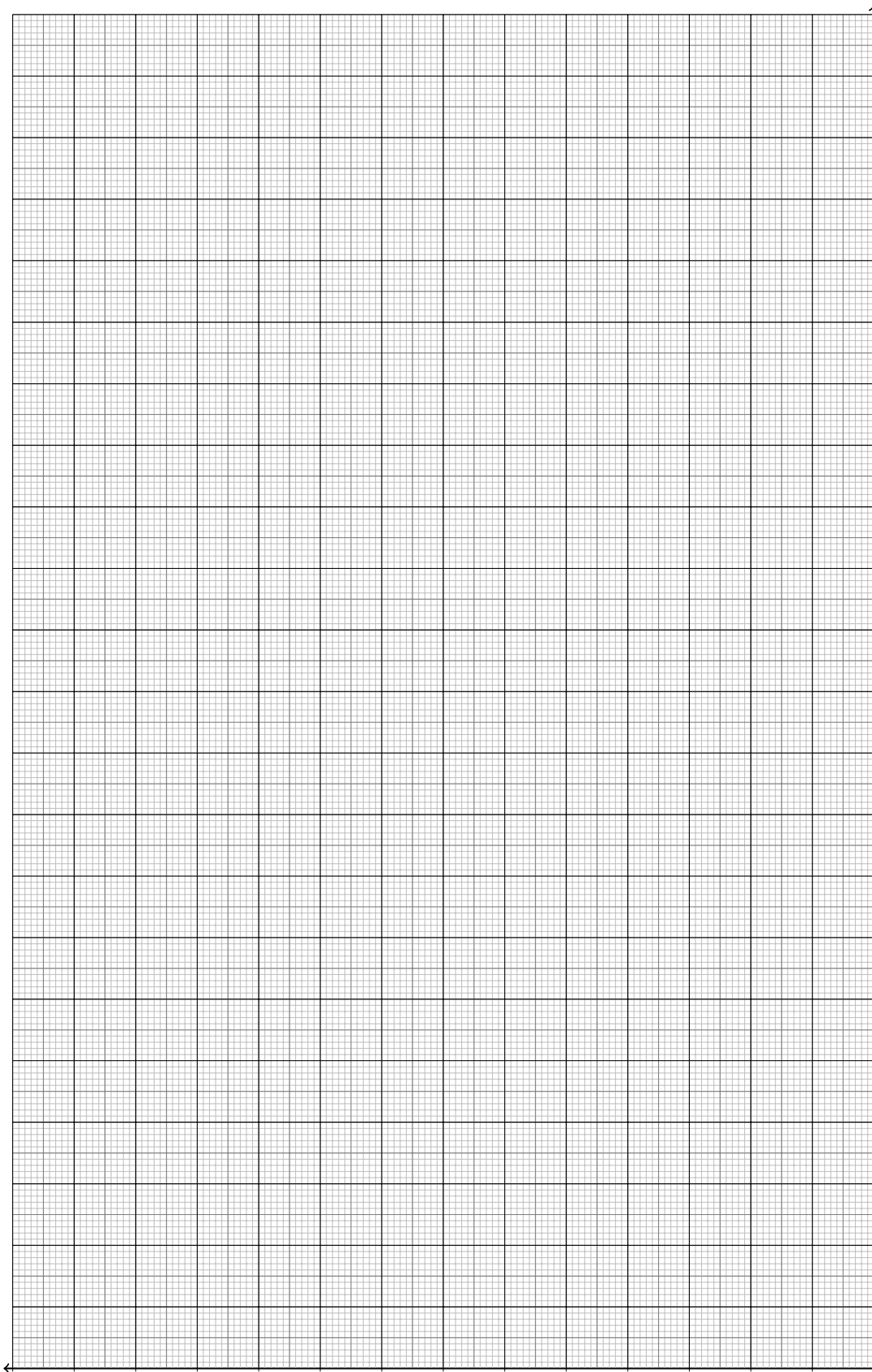


Abbildung 6.4: Diagramm für die matte Würfelseite

6.2 Bestimmung der Emissivität

Sie sollen nun die die Emissivität der verschiedenen Würfelseiten bestimmen. Gemäß der Definition von ϵ gilt:

$$\begin{aligned} P(T) &= \epsilon P_*(T) \\ \Leftrightarrow \epsilon &= \frac{P(T)}{P_*(T)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei P die thermische Strahlungsleistung eines betrachteten realen Strahlers ist und P_* die Strahlungsleistung eines idealen schwarzen Strahlers gleicher Temperatur T .

Wenn wir die exakte Strahlungsleistung aller Würfelseiten kennen würden, könnten wir die in den Raumbereich des Messgerätes abgestrahlte Leistung eines Schwarzkörpers aus dem Planckschen Strahlungsgesetz berechnen und dann die Emissivität nach Gl. 6.8 direkt ausrechnen. Dies ist hier aber nicht der Fall, denn wir haben zwar eine der Leistung proportionale Thermospannung gemessen, kennen die genaue Proportionalitätsbeziehung aber erst einmal nicht. Wir wenden daher eine Vereinfachung an, die uns dieses Problem umgehen lässt: Wir setzen die Emissivität der am stärksten strahlenden Würfelseite auf $\epsilon = 1$, d.h. wir betrachten unseren besten Strahler als einen idealen Schwarzkörper. Dadurch können wir die Emissivitäten als Verhältnis der zuvor berechneten Steigungen a zur Steigung unseres pseudo-idealen Strahlers berechnen.

	a [_____]	Δa [_____]	ϵ	$\Delta \epsilon$
Schwarz				
Weiß				
Spiegelnd				
Matt				

Tabelle 6.5: Berechnung der Emissivität

Tragen Sie darum in Tabelle 6.5 zunächst all ihre berechneten Steigungen samt ihrer Fehler ein. Identifizieren Sie die Seite mit der größten Steigung und notieren Sie die Emissivität

in der Tabelle als 1. Berechnen Sie nun die übrigen Emissivitäten als $\epsilon = \frac{a}{a_*}$, wobei a_* die Steigung der Seite ist, für die Sie $\epsilon = 1$ angenommen haben.

Die Fehlerformel für ϵ ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung als

$$\Delta\epsilon = \epsilon \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_*}{a_*}\right)^2} \quad (6.9)$$

Schreiben Sie die Herleitung von Gl. 6.9 aus Gl. 6.2 auf:

Beachten Sie, dass gemäß Formel 6.9 auch die Emissivität der am stärksten strahlenden Würfelseite einen berechenbaren Fehler $\neq 0$ hat. Zwar setzen Sie hier ϵ als 1 voraus, aber die Identifizierung des stärksten Strahlers ist von der fehlerbehafteten Steigung abhängig.

7 Diskussion der Ergebnisse (zu Hause)

Was für einen Verlauf haben Sie für ihre Graphen erwartet? Entsprachen die Ergebnisse diesen Erwartungen? Konnten Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz in diesem Abschnitt qualitativ bestätigen, und wenn ja, wie?

Für welche Würfelseite haben sie $\epsilon = 1$ angenommen? Warum? Haben Sie erwartet, dass diese Seite die beste Strahlungsleistung zeigen würde? Wie erklären Sie sich dieses Ergebnis?

8 Anhang zur Fehlerrechnung

8.1 Graphische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ einer Geradengleichung der Form $y = y(x) = a \cdot x + b$ bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare $(x_i | y_i)$ und deren Ungenauigkeiten Δx_i und/oder Δy_i in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die x_i - oder die y_i -Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen¹, sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet $\frac{2}{3}$ aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.
2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.

Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.

Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden $a_{\min/\max}$ und die y -Achsenabschnitte $b_{\min/\max}$ bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen Δx und Δy abgelesen. Dabei ist

¹In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus $a = \pm \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend (+) oder fallend (-) ist.

Die Werte $b_{\min/\max}$ können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung $b_{\min/\max} = y - a_{\min/\max} \cdot x$ bestimmt werden.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Fehler der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} \quad \& \quad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2},$$

$$b = \frac{b_{\max} + b_{\min}}{2} \quad \& \quad \Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}.$$

Wird diese Gerade im Diagramm eingezeichnet, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig und mit gleichen Winkeln schneiden.

Ein (fast) vollständiges Beispiel einer grafischen Geradenanpassung:

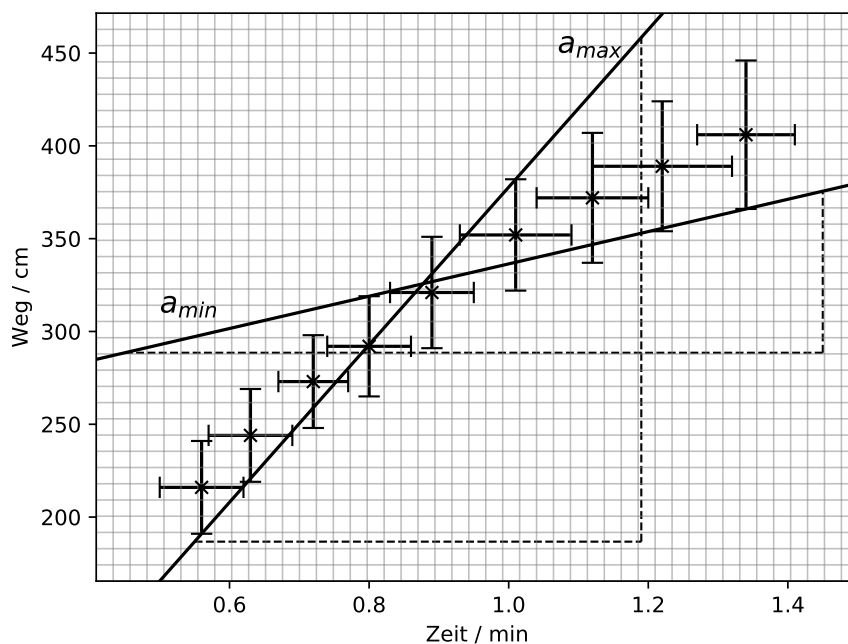


Abbildung 8.1: Diagramm zu einer beinahe vollständigen grafischen Geradenanpassung. Es könnten noch Werte an den Steigungsdreiecken ergänzt und die resultierende Ausgleichsgerade eingezeichnet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind diese Schritte hier ausgelassen.

In Abbildung 8.1 sind Werte eines fiktiven Experiments mit deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Zusätzlich wurden bereits die Extremalgeraden gefunden und eingezeichnet, sowie deren Steigungsdreiecke ergänzt. Im Beispiel könnten noch die Beschriftung der Steigungsdreiecke und die meist verlangte Ausgleichsgerade ergänzt werden. Es ist die zu den Daten

gehörige Geschwindigkeit $v \pm \Delta v$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ gesucht.

Zur Berechnung werden die Werte der Steigungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier:

$$a_{\min} = \frac{\sim 87}{\sim 1} = 87 \left[\frac{\text{cm}}{\text{min}} \right] \quad \& \quad a_{\max} = \frac{\sim 271}{\sim 0,64} = 423,44 \left[\frac{\text{cm}}{\text{min}} \right].$$

Die y -Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden:

$$b_{\min} = 375 - 87 \cdot 1,45 \approx 248,85 \text{ [cm]} \quad \& \quad b_{\max} = 458 - 423,44 \cdot 1,19 \approx -45,89 \text{ [cm]}.$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ anzuwenden und es ergeben sich die (bereits auf die hier relevanten Stellen gerundeten) Werte:

$$a \pm \Delta a = 255 \pm 168 \left[\frac{\text{cm}}{\text{min}} \right] \quad \& \quad b \pm \Delta b = 101 \pm 147 \text{ [cm]}.$$

Durch Umrechnung der Einheiten der Steigungswerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $v = (4,25 \pm 2,8) \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, also signifikant gerundet $v = (4 \pm 3) \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

8.2 Rechnerische Geradenanpassung

Die allgemeine Form einer Geradengleichung lautet:

$$y = y(x) = a \cdot x + b$$

Für einen Datensatz von Werten x_i und y_i ($i = 1, \dots, N$) lässt sich nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine entsprechende Geradengleichung finden. Anders ausgedrückt, es werden die Parameter a und b der Geraden so bestimmt, dass die Abweichungen zwischen den Werten und der Gerade minimal sind. Es ist sinnvoll für die Berechnung eigene Ausdrücke zu definieren:

$$\begin{aligned} [x] &= \sum_{i=1}^N x_i & [y] &= \sum_{i=1}^N y_i \\ [xx] &= \sum_{i=1}^N x_i^2 & [xy] &= \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ \Delta &= N \cdot [xx] - [x] \cdot [x] \\ \Rightarrow a &= \frac{N \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} & \& \quad b &= \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta} \end{aligned}$$

Weiterhin ist es möglich, und in der Regel notwendig, die Ungenauigkeiten von a und b zu bestimmen, also die Werte Δa und Δb . Erneut werden passende Ausdrücke definiert:

$$\begin{aligned} (\Delta y)^2 &= \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i)^2 & \text{für } y(x_i) &= a \cdot x_i + b \\ \Rightarrow \Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{N}{\Delta}} & \& \quad \Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{[xx]}{\Delta}} \end{aligned}$$

9 Literatur

- Fehlerrechnung:
http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 24. Aufl., 2010
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, Berlin, 6. Auflage, 2013
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html
- Tipler: Physik, Spektrum, Heidelberg, 3. Auflage, 2000
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Teubner Studienbücher Physik
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger, Teubner Studienbücher Physik
- Java- Applet der University of Oregon zur Verdeutlichung des Planck-Gesetzes
<http://jersey.uoregon.edu/vlab/PlankRadiationFormula/index.html>
- Wikipedia - u.a. Stefan-Boltzmann Gesetz,
<http://de.wikipedia.org>