Versuch W8 für Nebenfächler
Barometrische Höhenformel

I. Physikalisches Institut, Raum 106
Stand: 24. April 2014

generelle Bemerkungen

- **bitte verwendeten Versuchsaufbau angeben** (rote Pucks/weiße Pucks)
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

In diesem Versuch soll die vertikale Verteilung von idealen Teilchen in einem Schwerefeld gemessen werden. Die Teilchenzahldichte als Funktion der Höhe wird durch die barometrische Höhenformel beschrieben. Sie besagt, dass die Atmosphäre mit steigender Höhe „dünner“ wird; Druck und Teilchenzahldichte fallen exponentiell mit der Höhe ab. Andersherum ausgedrückt nimmt der Druck mit abnehmender Höhe zu, weil das Gas der Atmosphäre immer mehr die über ihm befindlichen Luftschichten zu tragen hat.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Zusammenhängen vertraut:
   - absolute Temperatur eines Körpers; Wie kann man die absolute Temperatur bestimmen?
   - Eigenschaften eines ideales Gases
   - Gasgesetz für das ideale Gas
   - barometrische Höhenformel
   - Was ist der Unterschied zwischen dem Boltzmann-Faktor und der Boltzmann-Konstante? Welche Bedeutung haben die beiden jeweils?
   - Was besagt der Boltzmann'sche Gleichverteilungssatz?
2. Leiten Sie die barometrische Höhenformel her und skizzieren Sie den dazugehörigen Graphen.
3. Fertigen Sie eine Skizze des Versuchaufbaus an und beschreiben Sie die Durchführung der Messungen.

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Da wir die Teilchenzahl und den daraus resultierenden Dichteverlauf der Atmosphäre nicht messen können, verwenden wir zum Nachweis der barometrischen Höhenformel ein zweidimensionales Modellgas. Das Gas besteht aus einer Anzahl flacher Pucks, die sich auf einem Lufttisch nahezu reibungslos bewegen und damit ein Kriterium eines idealen Gases erfüllen. Zur Herstellung eines Schwerefeldes wird in unserem Versuch der Tisch aus der Horizontalen geneigt. Aufgabe ist es, die statistische Verteilung der Pucks in Abhängigkeit der Tischneigung zu bestimmen.

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt. Eine Anzahl Pucks gleicher Größe und Gewicht befindet sich auf einem Lufttisch, auf dessen Oberfläche gleich große Zonen markiert sind. Wird das Gebläse eingeschaltet, schweben die Pucks und können sich auf der Tischoberfläche nahezu reibungsfrei bewegen. Die ungeordnete Bewegung von Gasteilchen einer bestimmten Temperatur wird durch einen Rüttelrahmen simuliert. Dadurch werden die Pucks angestoßen, stoßen wiederum untereinander und verteilen sich auf dem Tisch. Durch Neigung des Tisches wird ein Schwerefeld erzeugt. Die effektive Schwerebeschleunigung, die auf die Pucks wirkt, ist durch die Komponente der Erdbeschleunigung parallel zur Tischoberfläche gegeben. Verschiedene Tischneigungen führen zu unterschiedlichen effektiven Schwerebeschleunigungen. In der Atmosphäre ist die Schwerebeschleunigung natürlich konstant. Die Gasteilchen besitzen jedoch in verschiedenen Höhen unterschiedliche potentielle Energien $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$. Die Änderung der Tischneigung entspricht aufgrund des Produktes $g \cdot h$ letztendlich ebenfalls einer Änderung der potentiellen Energie der Pucks auf dem Tisch und simuliert damit unterschiedliche Höhen in der Atmosphäre.
Der Neigungswinkel α des Tisches wird geometrisch durch die Längen h_1, h_2 und b bestimmt (siehe Abb. 2). Die übrigen Daten der beiden verschiedenen Versuchsaufbauten können Sie Tabelle 1 entnehmen.

Tabelle 1: Details zu den Versuchsaufbauten.

	Aufbau 1 (rote Pucks)	Aufbau 2 (weiße Pucks)
Puckmasse	$(16{,}78 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$	$(13{,}37 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$
Puckdurchmesser	$(3{,}82 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}$	$(4{,}38 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}$
Zonenbreite	$(7{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$	$(7{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$

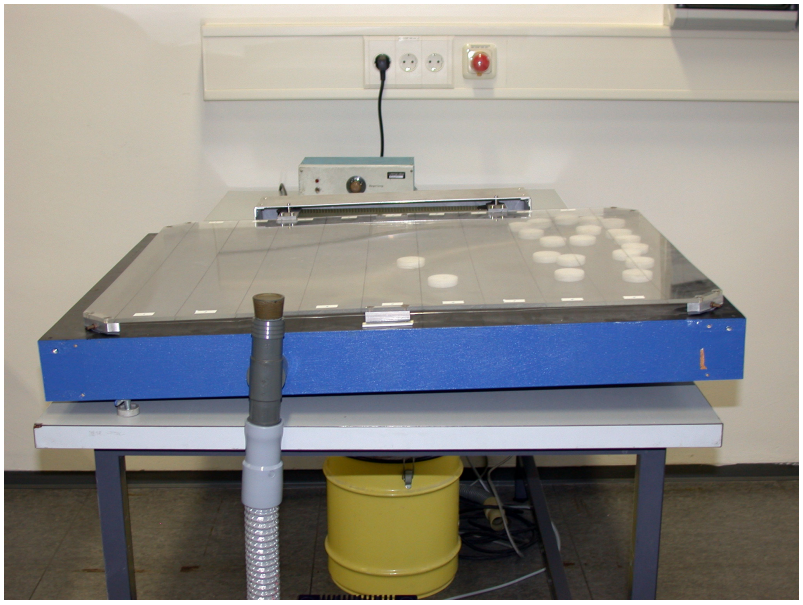

Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus.

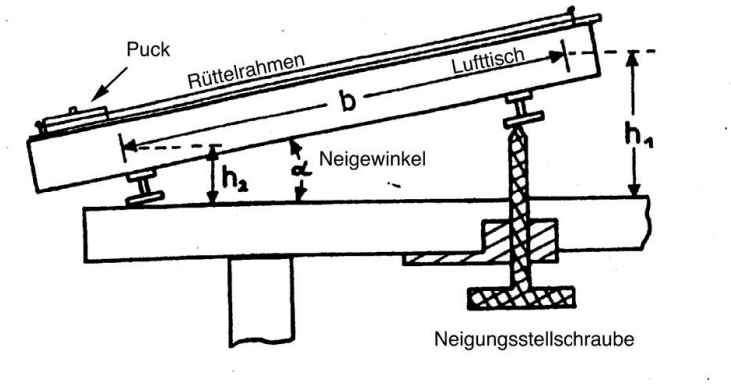

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus (Seitenansicht).

4 Benötigte Formeln

Die Tischneigung, bzw. der Sinus des Neigungswinkels, ergibt sich aus den gemessenen Größen h_1, h_2 und b durch:

$$\sin(\alpha) = \frac{h_1 - h_2}{b} \tag{1}$$

Die effektive Schwerebeschleunigung ist durch die Hangabtriebsbeschleunigung der Pucks auf dem geneigten Tisch gegeben:

$$g_{\text{eff}} = g \cdot \sin(\alpha) = g \cdot \frac{h_1 - h_2}{b} \tag{2}$$

Die barometrische Höhenformel (siehe Gl. (13)) gilt bei festem Volumen V auch direkt für die Teilchenzahlen N

$$N = N_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \tag{3}$$

Dabei ist N_0 die Teilchenzahl bei $h = 0$, m die Masse der Teilchen, T die absolute Temperatur des Gases und k_B die Boltzmannkonstante.
Durch Logarithmieren ergibt sich aus Gl. (3) und durch Einsetzen der effektiven Schwerebeschleunigung für die Pucks (Gl. (2)):

$$\ln N = \ln N_0 - \frac{mg\sin(\alpha)}{k_B T} h \tag{4}$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Allgemeine Hinweise:

Die Rüttelfrequenz des Tisches soll zu *keinem* Zeitpunkt des Versuches verstellt werden.

Die Rüttelstärke darf verstellt werden, muss jedoch für *beide* Messreihen beibehalten werden.

Der Neigungswinkel wird für jede Messreihe individuell gewählt, darf jedoch während einer Messreihe nicht mehr verändert werden.

Machen Sie sich mit dem Versuchsaufbau vertraut. Schalten Sie alles ein und spielen Sie an den Einstellmöglichkeiten für den Tisch herum. Die Tischneigung wird mittels einer Schraube verstellt. Welche Neigung ist für das Experiment sinnvoll? Sollte man mit einem größeren oder kleineren Winkel beginnen?
Insgesamt sollen 2 Messreihen durchgeführt werden, jeweils für unterschiedliche Tischneigungen. Jede der Messreihen umfasst 30 Messungen der Verteilung der Pucks, um eine ausreichende statistische Aussage zu erhalten. Für jede Messreihe wird außerdem der Neigungswinkel des Tisches durch Abmessen der benötigten Höhen (siehe Abb. 2) inkl. Ablesefehler protokolliert.

Führen Sie die folgenden Messungen für *zwei* verschiedene Tischneigungen durch:

1. Protokollieren Sie die gewählte Tischneigung, indem Sie die Höhen h_1 und h_2 und die Länge b inkl. Ablesefehler messen und notieren.

2. Schalten Sie den Rüttelrahmen ein. Sobald sich ein Gleichgewicht (nach ca. 15 sec) bei den Pucks eingestellt hat, ziehen Sie zuerst den Stopfen an der Luftzufuhr des Tisches und schalten Sie danach den Rüttelantrieb aus. Aufgrund des schnellen Auftriebsverlustes wird der Verteilungszustand der Pucks instantan eingefroren.

3. Zählen und protokollieren Sie die Anzahl der Pucks pro Zone. (Hinweis: Es hat sich bewährt, die Wertetabelle im Querformat anzufertigen.)

4. Starten Sie eine neue Messung, indem Sie den Rüttelrahmen wieder einschalten und die Luftzufuhr des Tisches durch Einsetzen des Stopfens wieder herstellen.

5. Führen Sie auf diese Weise insgesamt 30 Messungen der Puckverteilung für eine Tischneigung durch.

Schalten Sie nach dem Versuch das Gebläse und den Rüttelantrieb aus.

6 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (Zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, Was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung und Geradenanpassung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

6.1 Nachweis der Barometrischen Höhenformel

- Berechnen Sie aus den Größen b, h_1 und h_2 (siehe Abb. 2) für jede Messreihe den Wert $\sin(\alpha)$ inklusive Fehler. Bestimmen Sie daraus die effektive Erdbeschleunigung, die auf die Pucks wirkt (Hangabtriebs-Beschleunigung).

- Geben Sie für jede Messreihe den Neigungswinkel des Tisches ebenfalls mit Fehler an.

- Berechnen Sie die mittlere Anzahl $\bar{N}$ der Pucks pro Zone. Der Fehler $\Delta\bar{N}$ wird als Standardabweichung des Mittelwertes berechnet. Fertigen Sie ein Säulendiagramm für beide Messreihen an, in dem Sie die mittlere Anzahl der Pucks $\bar{N}$ gegen die Zonennummer auftragen (Fehlerbalken nicht vergessen!).

- Tragen Sie die Werte logarithmisch auf, d.h. zeichnen Sie $\ln \bar{N}$ als Funktion der Längeneinheit. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung für beide Messreihen durch.

- Geben Sie die Geradengleichung der graphischen Geradenanpassung an.

$$\ln \bar{N} = (a \pm \Delta a)\left[\tfrac{1}{\mathrm{m}}\right](\pm ...\%) \cdot x + (b \pm \Delta b)(\pm ...\%).$$

- Aus der Steigung der Geraden lässt sich die Temperatur des Gases berechnen. Verwenden Sie dazu die barometrische Höhenformel mit der *effektiven* Schwerebeschleunigung der Pucks.

6.2 Diskussion

Listen Sie alle Ergebnisse übersichtlich auf, d.h. die berechneten Temperaturen mit den zugehörigen Neigungswinkeln (inklusive Einheit und Fehler). Bewerten Sie ihre Ergebnisse. Entsprechen die Verläufe aller Graphen Ihren Erwartungen? Vergleichen Sie die Temperaturen für die beiden Messreihen. Stimmen die Ergebnisse mit Ihren Erwartungen überein? Wie lassen sich die hohen Temperaturen erklären? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

7 Anhang: Herleitung der Formeln

7.1 Herleitung der barometrischen Höhenformel

Zur Herleitung der barometrischen Höhenformel machen wir folgende Annahmen über die Atmosphäre:

1. die Temperatur T des Gases ist konstant
2. es tritt nur eine Teilchenart der Masse m auf
3. für die Teilchen gilt die Zustandsgleichung des idealen Gases

Im Schwerefeld wirkt auf jedes Teilchen die Schwerkraft $m \cdot g$. Die gesamte Schwerkraft von N Teilchen in einem festgelegten Volumen V ist dann gegeben durch $G = m \cdot g \cdot N$. Mit der Teilchenzahldichte $n = \frac{N}{V}$ ergibt sich für die Schwerkraft $G = m \cdot g \cdot n \cdot V$. Betrachten wir nun ein infinitesimales Volumen in der Atmosphäre, das durch eine Fläche A parallel zum Erdboden und eine Höhe dh gegeben ist. Die Änderung des Druckes dp bei Zunahme der Höhe um das Stück dh muss negativ sein, da der Druck mit zunehmender Höhe abnimmt. Die Druckänderung (Druck=Kraft/Fläche) beträgt dann:

$$dp = -mgn \cdot dh \tag{5}$$

Die Teilchenzahldichte n ist jedoch vom Druck abhängig. Dieser Zusammenhang wird durch die Zustandsgleichung idealer Gase gegeben:

$$p = nk_BT, \tag{6}$$

wobei k_B die Boltzmannkonstante ist. Gl. (6) in Gl. (5) eingesetzt ergibt:

$$dp = -mg\frac{p}{k_BT}dh \tag{7}$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die durch Trennen der Veränderlichen leicht gelöst werden kann:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{k_BT}dh \tag{8}$$

Integration ergibt:

$$\ln p = \frac{mg}{k_BT}h + C \tag{9}$$

Die Integrationskonstante lässt sich aus der Randbedingung bestimmen, dass auf der Erdoberfläche ($h = 0$) der Druck p_0 herrschen soll, also

$$\ln p_0 = 0 + C. \tag{10}$$

Gl. (10) eingesetzt in Gl. (9) ergibt:

$$\ln p - \ln p_0 = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{mg}{k_BT}h \tag{11}$$

Daraus folgt die barometrische Höhenformel für den Druck:

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \tag{12}$$

Für die Teilchenzahldichte als Funktion der Höhe ergibt sich durch die Zustandsgleichung idealer Gase (aus Gl. (6) folgt $\frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0}$):

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \tag{13}$$

Druck und Teilchenzahldichte fallen in der Atmosphäre exponentiell mit der Höhe ab.

Bei Anwendung der barometrischen Höhenformel sind jedoch die Annahmen zu berücksichtigen, die wir bei der Herleitung gemacht haben. Die größte Abweichung zur Realität wird sicherlich die Annahme konstanter Temperatur sein. Daher weicht die Druckverteilung der realen Atmosphäre durch ihre Bewegung und ihre oft sehr ungleichmäßige Temperatur stark von dem durch die barometrische Höhenformel beschriebenen Zusammenhang ab. Sie ist daher meist nur für Schichten von wenigen hundert Metern gut anwendbar. Für Teilchen verschiedener Masse m ergeben sich aus der barometrischen Höhenformel auch verschiedene Verteilungen. Der Anteil schwererer Teilchen müsste bei abnehmender Höhe größer werden und umgekehrt. Dieser Effekt ist aber aufgrund der guten Durchmischung der Atmosphäre kaum zu beobachten. Er zeigt sich allerdings sehr deutlich bei der Verteilung von Staubteilchen, die wegen ihrer großen Masse nur geringe Höhen erreichen.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
  http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 24. Aufl., 2010
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, Berlin, 6. Auflage, 2013
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html
- Tipler: Physik, Spektrum, Heidelberg, 3. Auflage, 2000
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Teubner Studienbücher Physik
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger, Teubner Studienbücher Physik

9 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumsanleitung dargelegt wurden.