# Versuch W4 für Physiker
# Bestimmung von $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ - Adiabatenkoeffizient

I. Physikalisches Institut, Raum HS102
Stand: 22. Mai 2014

## generelle Bemerkungen

- **bitte verwendeten Versuchsaufbau angeben** (Nummer)
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

# 1 Einleitung

Nach den Methoden von E. Rüchard und Clément-Desormes soll in diesem Versuch das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, von Luft und Argon bestimmt werden.

# 2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
   - Allgemeine Begriffe:
     Thermodynamische Hauptsätze, ideales Gas, ideale Gasgleichung, Zustandsänderungen, Wärmekapazität, Äquipartitionsgesetz (Grundlagen der kinetischen Gastheorie), harmonischer Oszillator
   - Start-Stopp-Fehler
2. Leiten Sie die Darstellung des Adabatenkoeffizienten $\gamma$ in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden des Systems her (Gleichung (9)).
3. Welche Werte von $\gamma$ erwarten Sie für Luft bzw. Argon? Begründen Sie Ihre Erwartungen mit den Eigenschaften der beiden Gase (Zusammensetzung, Aufbau der einzelnen Teilchen, ...).
4. Leiten Sie das Poisson'sche Gesetz (Gleichung (14)) her.
5. Leiten Sie Gleichung (1) zur Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard her.
6. Leiten Sie Gleichung (2) zur Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes her.
7. Fertigen Sie eine Skizze der Versuchsaufbauten an, an der alle zu messenden Größen zugeordnet sind und beschreiben Sie die Durchführung des Versuchs.

# 3 Versuchsaufbau und -beschreibung

## 3.1 Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

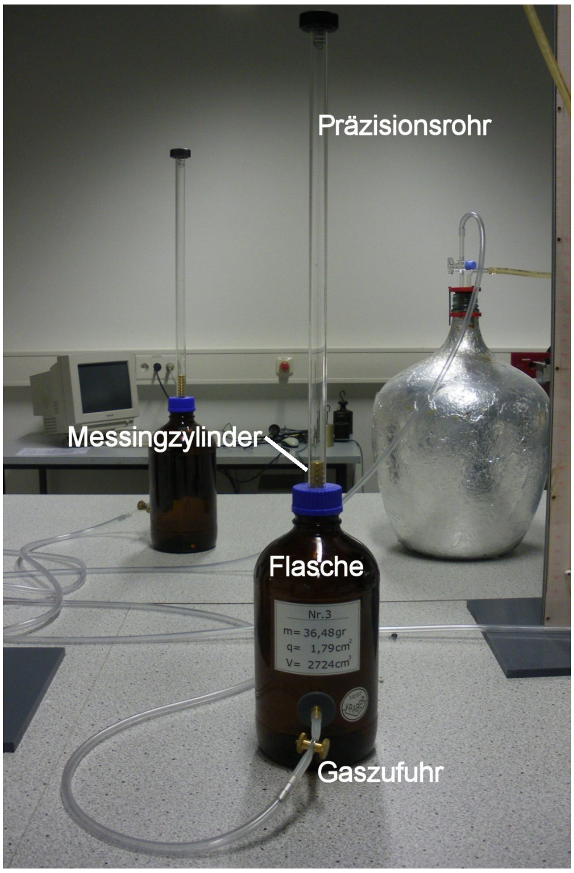


Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

Auf einer Flasche befindet sich ein Präzisionsglasrohr, in das ein kleiner Metallzylinder eingepasst ist. Über den abgebildeten Schlauch kann die Flasche entweder mit Argon oder mit Druckluft befüllt werden.
Der Luftstrom versetzt den Zylinder in Schwingung, so dass er während des Versuchs im Glasrohr auf und ab schwingt. Die Periodendauer dieser Schwingung ist bestimmt durch die Masse des Zylinders, die Abmessungen der Flasche und des Glasrohrs, sowie den Adiabatenkoeffzienten des eingefüllten Gases (vgl. Gleichung (27)). Sind die die übrigen Größen bekannt, kann man also durch Messung der Schwingungsdauer den Adiabetenkoeffizienten bestimmen.
Idealerweise sollte der Zylinder das Rohr vollkommen dicht abschließen und gleichzeitig reibungsfrei in dem Glasrohr schwingen. Dies ist offensichtlich nicht gleichzeitig möglich. In der Realität entweicht ständig Gas aus dem System und Reibungskräfte dämpfen die

Schwingung des Zylinders. Dem wird entgegengewirkt, indem ständig eine geringe Menge Gas zugeführt wird und ein kleines Loch in Höhe der Ruhelage des Zylinders im Glasrohr angebracht wird. Der Zustrom des Gases gleicht die entweichende Gasmenge aus. Das Überdruckloch wird bei der Schwingung des Zylinders periodisch geöffnet und geschlossen, was für eine phasengerechte Beschleunigung des Zylinders sorgt. Die Dämpfung wird also durch ein rückgekoppeltes, selbsterregendes Schwingsystem ausgeschaltet. Dies führt allerdings dazu, dass die Anregungskräfte weniger harmonisch sind als in der Herleitung von Gleichung (1) angenommen. Auch die Stärke der Gaszufuhr beeinflusst die Schwingungsfrequenz des Systems. Dieser Einfluss ist aber vernachlässigbar.

### 3.2 Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

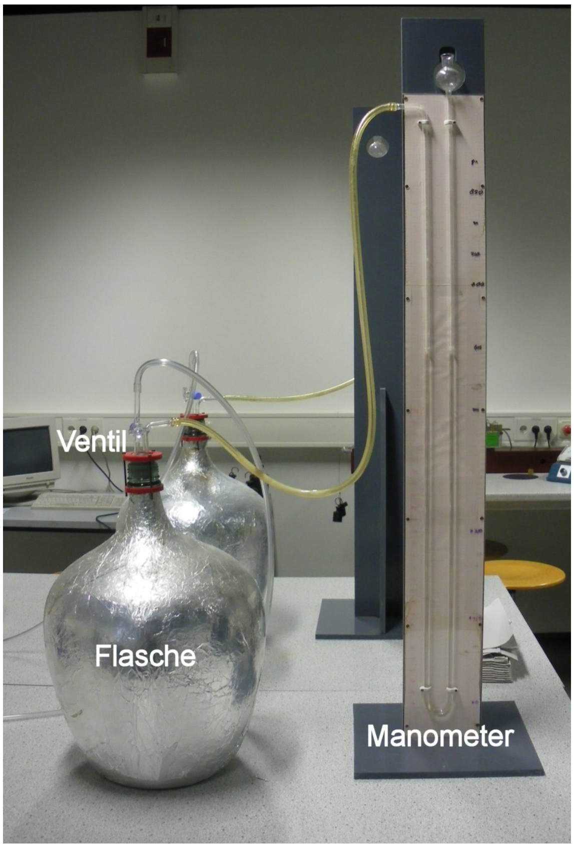


Abbildung 2: Foto des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

An einer Flasche mit großem Volumen ist ein Flüssigkeitsmanometer angeschlossen. Über ein Ventil kann die Flasche mit Druckluft gefüllt oder mit dem Außenraum verbunden werden. Wird über dieses Ventil schnell etwas Druck aus der Flasche in den Außenraum abgelassen, so sinkt durch die Expansion zunächst die Temperatur in der Flasche. Im Verlauf der Zeit gleicht sie sich aber wieder der Raumtemperatur an, wobei sich der Druck des Gases ein wenig erhöht. Eine genaue Betrachtung der verschiedenen Zustandsänderungen in diesem Prozess zeigt, dass die Drücke vor und nach dem Öffnen des Ventils und nach dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts über den Adiabatenkoeffizienten verknüpft sind (vgl. Gleichung (46)). Im vorliegenden Versuch werden die benötigten Druckdifferenzen mit Hilfe des angeschlossenen Flüssigkeitsmanometers bestimmt.

# 4 Benötigte Formeln

## 4.1 Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

Der Adiabatenkoeffizient $\gamma$ berechnet sich aus dem Ruhelagen-Volumen der Flasche $V_0$, der Querschnittsfläche des Zylinders $q$, der Periodendauer $T$ der Schwingung und dem Ruhelagen-Druck $p_0$ als:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{q^2 p_0 T^2} \tag{1}$$

Dabei ist $p_0 = p_a + \frac{mg}{q}$ durch den Außendruck $p_a$, die Masse des Zylinders $m$, seine Querschnittsfläche und die Erdbeschleunigung $g$ gegeben.

## 4.2 Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

Der Adiabatenkoeffizient $\gamma$ berechnet sich aus den Höhen der rechten Wassersäule ($h_n$) als:

$$\gamma = \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2} \tag{2}$$

Dabei ist $h_0$ die Höhe vor dem Öffnen des Ventils, $h_1$ die mittlere Höhe nach dem Öffnen des Ventils und $h_2$ die Höhe im thermischen Gleichgewicht nach dem Öffnen des Ventils.

# 5 Durchführung (im Praktikum)

**Hinweise:**

*Führen Sie den Gaswechsel von Luft auf Argon keinesfalls selbst durch. Rufen Sie dafür Ihren Assistenten an. Gleiches gilt für die Druckluftversorgung für Teil 5.2.*
*Verstellen Sie während der Messungen die Druckklemmen nicht, das beeinflusst den Druck in allen Aufbauten.*
*Berühren Sie während der Messungen nicht den Tisch, um die Schwingung des Zylinders nicht zu stören.*

Machen Sie sich vor Beginn der Messungen mit dem zu verwendenden Versuchsaufbau vertraut. Es empfiehlt sich, kurze Testmessungen durchzuführen, um später die Abläufe zu beherrschen.
Bereiten Sie vor Beginn der Messungen 5.1 den Aufbau für die Messungen 5.2 vor. Leiten Sie dazu Druckluft in die Flasche und erhöhen Sie so den Druck, bis die maximale Anzeigehöhe des Manometers erreicht ist. Bei diesem Vorgang erhöht sich die Temperatur in der Flasche durch die Kompression der Luft. Damit sich die Temperatur wieder an die Umgebung angleichen kann, warten Sie nach dem Füllen der Flasche mindestens zehn Minuten bevor Sie mit den Messungen 5.2 beginnen.

## 5.1 Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

Messen Sie den Luftdruck $p_a$ an dem im Raum befindlichen Manometer.

**Führen Sie die folgenden Messungen sowohl für Luft, als auch für Argon durch:**

- Regulieren Sie an der Druckklemme den Zustrom zur Flasche so ein, dass der Zylinder möglichst symmetrisch um das Überdruckloch im Glasrohr schwingt.
- Messen Sie je fünf mal die Zeit für 50 Schwingungen mit der Stoppuhr und notieren Sie die Messwerte tabellarisch.

Notieren Sie außerdem die Zylindermasse $m$, das Volumen $V_0$, den Rohrquerschnitt $q$, sowie die Messungenauigkeiten für Druck und Zeit (die Ungenauigkeiten von Masse, Querschnitt und Volumen sind vernachlässigbar).

## 5.2 Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

Dieser Versuchsteil wird nur mit Luft durchgeführt.
Legen Sie vor Beginn Ihrer Messungen folgende Tabelle an, um dort Ihre Messwerte einzutragen:

| Nr. $i$ | $h_0$ [mm] | $h_1^{min}$ [mm] | $h_1^{max}$ [mm] | $h_2$ [mm] |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |

Warten Sie, bis sich der Versuchsaufbau im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt bis die Höhe $h_0$ der Wassersäule konstant ist. Notieren Sie $h_0$.

**Führen Sie die folgenden Messungen fünfmal durch:**

- Öffnen Sie kurzzeitig das Ventil, so dass die Höhe der Wassersäule um etwa $2-3$ cm absinkt. *Öffnen und schließen Sie das Ventil ruhig aber zügig.*
- Nach dem Schließen des Ventils schwingt die Wasserhöhe einige Male. Lesen Sie das erste Minimum ($h_1^{min}$) und Maximum ($h_1^{max}$) dieser Schwingung ab.
- Warten Sie, bis sich der Versuchsaufbau im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt bis die Höhe $h_2$ der Wassersäule konstant ist. Notieren Sie $h_2$. Dieser Wert dient als $h_0$ der nächsten Messung.

Schätzen und notieren Sie die Ablesefehler für $h_0$ und $h_2$.

# 6 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (Zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, Was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung.*

## 6.1 Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

- Berechnen Sie die mittlere Schwingungsdauer $\bar{T}$.
- Bestimmen Sie nun den Adiabatenkoeffizienten $\gamma$ nach Gleichung (1).

## 6.2 Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

- Bestimmen Sie für alle fünf Messungen $h_1$ als Mittelwert von $h_1^{min}$ und $h_1^{max}$.
- Berechnen Sie damit für jede Messung den Adiabatenkoeffizienten nach Gleichung (2).
- Bestimmen Sie als Endergebnis den *gewichteten* Mittelwert dieser fünf Einzelergebnisse.

## 6.3 Diskussion

Vergleichen Sie Ihre Resultate aus beiden Versuchsteilen miteinander und mit den erwarteten Werten und diskutieren Sie mögliche Fehlerquellen. Welche Methode ist zuverlässiger und warum? Hätte es sich in Teil 5.1 gelohnt, die Anzahl der gemessenen Schwingungen deutlich zu erhöhen?

# 7 Anhang: Herleitung der Formeln

## 7.1 Poisson-Gleichung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U - \mathrm{d}W \tag{3}$$

Dabei ist $\mathrm{d}Q$ die einem System zugeführte Wärme, $\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$ die daraus resultierende Änderung seiner inneren Energie und $\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V$ die während der Zustandsänderung vom System geleistete Arbeit. $T$ ist die Temperatur des Systems, $C_V$ seine Wärmekapazität bei isochoren Prozessen ($\mathrm{d}V = 0$), $p$ sein Druck und $V$ sein Volumen. Für adiabatische Zustandsänderungen ($\mathrm{d}Q = 0$) folgt daraus:

$$-p\mathrm{d}V = C_V \mathrm{d}T \tag{4}$$

Aus der idealen Gasgleichung $pV = nR \cdot T$ ($R$ ist die allgemeine Gaskonstante und $n$ die Molzahl des Systems) folgt:

$$\mathrm{d}T = \frac{f}{2C_V}\left(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p\right) \ , \tag{5}$$

wobei wir verwendet haben, dass wir laut Äquiparitionsgesetz $C_V = \frac{f}{2}nR$ durch die Anzahl der Freiheitsgrade $f$ der Teilchen des Systems darstellen können. Damit können wir Gleichung (4) umformen zu:

$$\begin{aligned}
& -p\mathrm{d}V &=& \frac{f}{2}\left(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p\right) & (6)\\
\Leftrightarrow\quad & -\left(\frac{f}{2}+1\right)\frac{\mathrm{d}V}{V} &=& \frac{f}{2}\frac{\mathrm{d}p}{p} & (7)\\
\Leftrightarrow\quad & -\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} &=& \frac{\mathrm{d}p}{p} & (8)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den Adiabatenkoeffizienten

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \tag{9}$$

($C_p$ ist die Wärmekapazität des Systems bei isobaren ($\mathrm{d}p = 0$) Prozessen) verwendet und nach den Variablen $p$ und $V$ sortiert. Integration von Gleichung (8) führt zu:

$$\begin{aligned}
& -\gamma\left(\ln(V) - \ln(V_0)\right) &=& \left(\ln(p) - \ln(p_0)\right) & (10)\\
\Leftrightarrow\quad & \ln\left(\frac{V_0^\gamma}{V^\gamma}\right) &=& \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) & (11)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} &=& \frac{p}{p_0} & (12)\\
\Leftrightarrow\quad & pV^\gamma &=& p_0 V_0^\gamma & (13)\\
\Leftrightarrow\quad & pV^\gamma &=& \mathrm{const} & (14)
\end{aligned}$$

## 7.2 Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard

Abbildung 3 zeigt eine schematische Darstellung des verwendeten Versuchsaufbaus. Wir definieren für die folgenden Rechnungen die $x$-Achse entlang des Rohrs mit aufwärts zeigender positiver Richtung (siehe Vergrößerung im rechten Teil der Abbildung).
Auf den Zylinder mit Querschnittsfläche $q$ wirken die folgenden Kräfte:

- die nach oben gerichtete Kraft $F_i = p_i \cdot q$, die durch den Flascheninnendruck entsteht
- die nach unten gerichtete Kraft $F_a = p_a \cdot q$, die durch den Außendruck entsteht
- die nach unten gerichtete Gewichtskraft des Zylinders, $F_G = m \cdot g$, wobei $m$ die Masse des Zylinders und $g$ die Erdbeschleunigung sind

Die Gesamtkraft auf den Zylinder ist also gegeben durch:

$$F_{ges} = p_i \cdot q - p_a \cdot q - m \cdot g \tag{15}$$

Der Innendruck der Flasche und damit die Kraft auf den Zylinder verändert sich, wenn der Zylinder aus seiner Ruhelage ausgelenkt wird, da sich dadurch das Flaschenvolumen verändert. Lässt man den ausgelenkten Zylinder nun los, führt er Schwingungen um seine

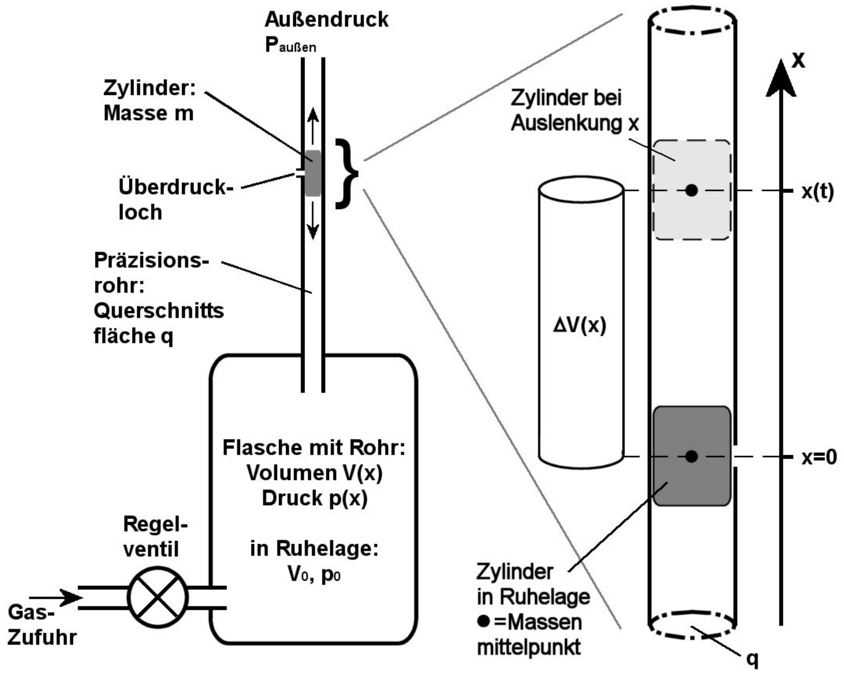


Abbildung 3:
*links*: Schema des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von $\gamma$ nach E. Rüchard
*rechts*: Vergrößerung des Rohrausschnitts in der Nähe der Ruhelage

Ruhelage aus. Die Zustandsänderungen während dieser Schwingungen gehen so schnell vonstatten, dass wir sie als adiabatisch ansehen können. Damit gilt das Poisson'sche Gesetz $p \cdot V^\gamma = \text{const}$. Wenn sich der Zylinder in der Position $x$ befindet, erhalten wir Druck (wir schreiben $p(x)$ statt $p_i(x)$) und Volumen der Flasche demnach aus den Werten in der Ruhelage $p_0$ und $V_0$ als:

$$p(x) \cdot V(x)^\gamma = p_0 \cdot V_0^\gamma \tag{16}$$

In der Ruhelage des Zylinders (bei $x = 0$) muss Kräftegleichgewicht herrschen, also

$$\begin{aligned} F_{ges}(x=0) &= p_0 \cdot q - p_a \cdot q - m \cdot g = 0. &(17)\\ \Rightarrow \quad q \cdot p_0 &= q \cdot p_a + m \cdot g &(18) \end{aligned}$$

Damit können wir Gleichung (15) umschreiben zu:

$$\begin{aligned} F_{ges}(x) &= q \cdot (p(x) - p_0) &(19)\\ &= qp_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V(x)} \right)^\gamma - 1 \right] &(20) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Gleichung (16) verwendet. Wie in Abbildung 3 dargestellt, können wir das Volumen V(x) umschreiben zu:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 + \Delta V = V_0 + q \cdot x &(21)\\ \Rightarrow \quad \left(\tfrac{V_0}{V(x)}\right)^\gamma &= \left( \frac{1}{1 + \frac{qx}{V_0}} \right)^\gamma = \left(1 + \frac{qx}{V_0}\right)^{-\gamma} &(22)\\ \Rightarrow \quad F(x) &= qp_0 \left[ \left(1 + \frac{qx}{V_0}\right)^{-\gamma} - 1 \right] &(23) \end{aligned}$$

In unserem Versuchsaufbau gilt $\frac{qx}{V_0} \ll 1$, daher können wir von der Näherung

$$(1+u)^{-\gamma} \approx 1 - \gamma u \tag{24}$$

Gebrauch machen (Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung). Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(x) &\approx -\frac{q^2 p_0 \gamma}{V_0} x &(25)\\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{q^2 p_0 \gamma}{m V_0} x = -\omega^2 x &(26) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung hat damit die gleiche Form wie die eines harmonischen Oszillators mit Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{q^2 p_0 \gamma}{m V_0}}$. Die Schwingungsdauer ist dann:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m V_0}{q^2 p_0 \gamma}} \tag{27}$$

Damit ergibt sich der Adiabatenkoeffizient zu:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{q^2 p_0 T^2} \tag{28}$$

## 7.3 Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

### 7.3.1 Zustandsgrößen

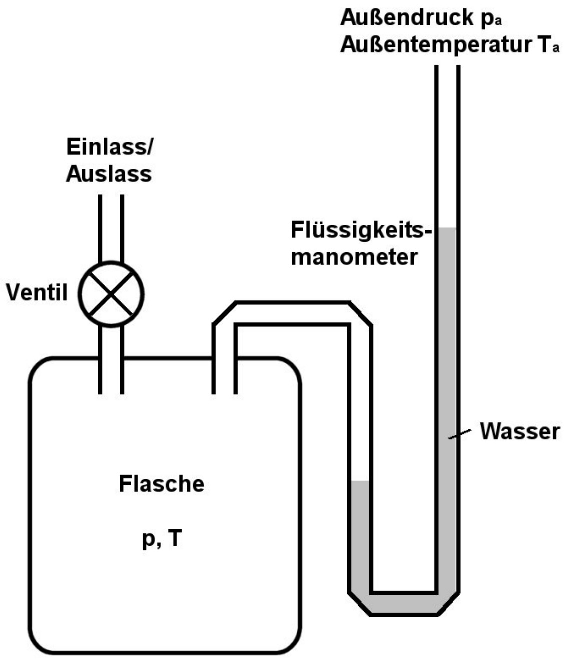


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur Bestimmung von $\gamma$ nach Clément-Desormes

Abbildung 4 zeigt eine schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Das Flüssigkeitsmanometer besteht aus einem U-Rohr mit Querschnittsfläche $q$, das mit Wasser gefüllt ist. Auf die linke Seite wirkt der Druck, der in der Flasche herrscht, $p_i$, auf die rechte Seite der Außendruck $p_a$. Dadurch stellt sich zwischen den beiden Wassersäulen ein Höhenunterschied $\Delta h$ ein, bei dem der Gewichtsdruck der Druckdifferenz entspricht. Es gilt also:

$$
\begin{aligned}
p(\Delta h) &= \frac{F_G}{q} = \frac{mg}{q} && (29) \\
&= \frac{\rho q \Delta h g}{q} && (30) \\
&= \rho g \Delta h && (31) \\
&= \rho g \left(h_{re} - h_{li}\right) && (32)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\rho$ die Dichte des Wassers, $g$ die Erdbeschleunigung und $h_{re}$ bzw. $h_{li}$ ist die Höhe der Wassersäule auf der rechten bzw. linken Seite. Da die Länge der Wassersäule konstant ist, können wir schreiben:

$$\begin{aligned} h_{ges} &= h_{re} + h_{li} && (33) \\ \Rightarrow \quad p(\Delta h) &= \rho g \left(2h_{re} - h_{ges}\right) \\ &=: \tilde{p}\left(h_{re}\right) && (34) \end{aligned}$$

Der Messzyklus besteht aus drei Zuständen, die jeweils durch Druck $p_n$, Temperatur $T_n$ und Volumen $V_n$ charakterisiert sind ($n = 0, 1, 2$). Sie sind verknüpft durch zwei Zustandsänderungen. Zu Beginn der Messung hat das Gas die Zustandsgrößen

$$p_0 = p_a + \tilde{p}\left(h_0\right) \ , \ T_0 = T_a \text{ und } V_0 = V \ . \tag{35}$$

Anstelle von $h_{re,n}$ verwenden wir hier die Schreibweise $h_n$. $T_a$ ist die Außentemperatur und wir gehen davon aus, dass die Volumenänderung zwischen den verschiedenen Zuständen so klein ist, dass wir für alle Zustände das gleiche Volumen $V$ verwenden können.
Nach dem kurzzeitigen Öffnen des Ventils zum Außenraum ist die Wassersäule im rechten Rohr auf die Höhe $h_1$ abgesunken. Dieser Vorgang entspricht einer adiabatischen Dilatation/Expansion, bei der sich die Temperatur der Luft in der Flasche verringert. Direkt nach dem Schließen gelten daher die neuen Zustandsgrößen

$$p_1 = p_a + \tilde{p}\left(h_1\right) \ , \ T_1\left(< T_0\right) \text{ und } V_1 = V \ . \tag{36}$$

Im Verlauf der Zeit stellt sich nun wieder das thermische Gleichgewicht ein, das heißt die Temperatur erhöht sich wieder auf Außentemperatur. Im thermischen Gleichgewicht gelten die Zustandsgrößen

$$p_2 = p_a + \tilde{p}\left(h_2\right) \ , \ T_2 = T_0 = T_a \text{ und } V_2 = V \ . \tag{37}$$

Da sich die Temperatur erhöht, gilt $h_2 > h_1$.

### 7.3.2 Verknüpfung der drei Zustände

Für eine adiabatische Zustandsänderung gilt das Poisson'sche Gesetz $p \cdot V^\gamma = \text{const}$. Mit Hilfe der idealen Gasgleichung können wir dies umschreiben zu:

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = \text{const} \tag{38}$$

Für die erste Zustandsänderung (von (35) nach (36)) gilt daher:

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^\gamma \tag{39}$$

Für die isochore ($V = \text{const}$) Änderung von (36) nach (37) liefert die ideale Gasgleichung:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0}{T_1} \tag{40}$$

Damit können wir Gleichung (39) umschreiben zu:

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma} \tag{41}$$

Logarithmieren liefert dann:

$$\begin{aligned}
(\gamma-1)\cdot(\log(p_0)-\log(p_1)) &= \gamma\cdot(\log(p_2)-\log(p_1)) && (42)\\
\Rightarrow \qquad \gamma &= \frac{\log(p_0)-\log(p_1)}{\log(p_0)-\log(p_2)} && (43)\\
&= \frac{\log\left(1+\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}\right)-\log\left(1+\frac{\tilde{p}(h_1)}{p_a}\right)}{\log\left(1+\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}\right)-\log\left(1+\frac{\tilde{p}(h_2)}{p_a}\right)} && (44)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Druckdarstellungen aus Gleichungen (35) und (37) verwendet und $p_a$ ausgeklammert. Um diesen Ausdruck weiter zu vereinfachen, substituieren wir nun zunächst $\epsilon_n = \frac{\tilde{p}(h_n)}{p_a}$ und betrachten die einzelnen Logarithmus-Terme separat. Im vorliegenden Experiment wird $\tilde{p}(h_n) \ll p_a$ sein und damit $\epsilon_n$ sehr klein. Daher können wir $\log(1+\epsilon_n)$ in eine Taylorreihe um $\epsilon_n = 0$ entwickeln und die Reihe nach dem linearen Term abbrechen:

$$\log(1+\epsilon_n) \approx \log(1) + \left.\frac{1}{1+\epsilon_n}\right|_{\epsilon_n=0} \cdot \epsilon_n = \epsilon_n \tag{45}$$

Rücksubstitution und Einsetzen in Gleichung (44) liefert:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}-\frac{\tilde{p}(h_1)}{p_a}}{\frac{\tilde{p}(h_0)}{p_a}-\frac{\tilde{p}(h_2)}{p_a}} && (46)\\
&= \frac{h_0-h_1}{h_0-h_2} && (47)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Gleichung (34) verwendet.

## 8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  `http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/`
  `http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf`
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002 (Kapitel 4)
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Bergmann und Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1, Mechanik - Relativität - Wärme, Walter de Gruyter, Berlin, 11. Auflage, 1998
  `http://www.degruyter.com/view/books/9783110208214/9783110208214.1.399/9783110208214.1.399.xml`
- Halliday: Physik, Wiley-VCH, 2. Auflage, 2009

## 9 Sicherheitshinweise

In diesem Versuch werden Druckgase verwendet. Verstellen Sie niemals selbst die Ventile an der Wand oder an der Argonflasche, darum kümmert sich Ihr Assistent.

Bitte beachten Sie außerdem die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumsanleitung dargelegt wurden.