I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

# W12: Gasgesetze

## Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 26. Mai 2021

Abzugeben bis: ____________________

Assistent: ____________________

Gruppenmitglieder: ____________________

____________________

____________________

**Wichtige Informationen**

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].
Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.
Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.
Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.
Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

---

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: `https://www.astro.uni-koeln.de/AP/`

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die allgemeine Gasgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur eines abgeschlossenen Gasvolumens. Ein Spezialfall ist aus dem Alltag geläufig, nämlich die Änderung des Volumens unter Temperaturänderung bei konstantem Druck. Dies zeigt sich beispielsweise wenn leere, einfach verformbare Flaschen, wie normale Einweg-Flaschen, sich bei einer kälteren Temperatur zusammenziehen. Halb-gefüllte Saftflaschen aus Kunststoff wölben sich beispielsweise im Kühlschrank häufig nach innen.
In diesem Versuch wird die Ausdehnung eines abgeschlossenen Gasvolumens bei Temperaturerhöhung dazu verwendet, die Ausdehnungskonstante des Gases zu messen. Außerdem wird die universelle Gaskonstante experimentell bestimmt, indem die Druckerhöhung des Gases bei Verkleinerung des Volumens untersucht wird. Obwohl die allgemeine Gasgleichung nur für ideale Gase gilt, ist sie in vielen Bereichen auch für reale Gase, wie z. B. Luft, anwendbar.

# 2 Vorbereitung (vor dem Praktikum, zu Hause)

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf theoretische Überlegungen und Grundlagen dieses Versuchs. Ergänzungen und weiterführende Anmerkungen befinden sich im Anhang (Abschnitt 9) und sind entsprechend hier markiert.
Beachten Sie bitte, dass die Lücken in diesem Abschnitt auszufüllen sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Um an dem Versuch teilnehmen zu können, müssen Sie die Anleitung vollständig gelesen und verstanden haben und allgemein auf den Versuch vorbereitet sein.

## 2.1 Allgemeine Begriffe

### 2.1.1 Temperatur

Wie ist Temperatur definiert? Wie wird Temperatur gemessen? ____________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

### 2.1.2 Druck

Wie ist Druck definiert? Nennen Sie verschiedene Methoden der Druckmessung. ________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

### 2.1.3 Stoffmenge

Geben Sie verschiedene Methoden der Stoffmengenberechnung (in Einheiten von Mol) an.

Wofür wird die Avogadrokonstante verwendet und wie lautet diese? (Quelle angeben!) ____

____________________

____________________

____________________

(Quelle: ____________________)

## 2.2 Ideales Gas(-gesetz)

Nutzen Sie die folgenden Größen, um zwei sehr gängige Formen des idealen Gasgesetzes darzustellen: Druck $p$, Volumen $V$, Temperatur $T$, Stoffmenge $n$, Teilchenzahl $N$, universelle Gaskonstante $R$, Boltzmannkonstante $k_B$.

Was ist ein ideales Gas? Welche Eigenschaften hat es?

## 2.3 Gleichverteilungssatz

Was besagt der Gleichverteilungssatz (auch als Äquipartitionstheorem bezeichnet)?

Wie lautet die Formel der mittleren kinetischen Energie nach dem Gleichverteilungssatz im allgemeinen Fall?

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \underline{\hspace{4cm}}$$

Wie lautet diese Formel für ein einatomiges ideales Gas?

$$\langle E_{\mathrm{kin}} \rangle = \underline{\hspace{4cm}}$$

## 2.4 Gasgesetz: Spezialfälle

Es existieren mehrere Spezialfälle des idealen Gasgesetzes. Drei Spezialfälle beschreiben elementare Beziehungen von Zustandsgrößen von Gasen untereinander. Benennen Sie den jeweiligen Zusammenhang, welcher in den folgenden Gesetzen beschrieben wird, unter der Annahme, dass die Stoffmenge des Gases konstant ist. Notieren Sie dazu zunächst die jeweilige Proportionalität und beschreiben Sie danach das Gesetz in Worten:

Gesetz nach Gay-Lussac: _____ $\sim$ _____, in Worten: ______________________________

Gesetz nach Amontons: _____ $\sim$ _____, in Worten: ______________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Gesetz nach Boyle-Mariotte: _____ $\sim$ _____, in Worten: ___________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## 2.5 Van-der-Waals Gleichung

Was beschreibt die van-der-Waals Gleichung? Wie unterscheidet sie sich dabei vom idealen

Gasgesetz, bzw. wie hängen diese zusammen? _____________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Wie lautet die van-der-Waals Gleichung? Füllen Sie dazu die Lücken in der folgenden Gleichung aus, indem Sie soweit wie möglich die gleichen Größen wie beim idealen Gasgesetz (siehe Abschnitt 2.2) sowie zwei neu eingeführte Größen nutzen.

$$\left(p + \underline{\hspace{3cm}}\right) \cdot \left(V - \underline{\hspace{3cm}}\right) = nRT$$

Beschreiben Sie die beiden neuen Größen und wofür diese stehen. ________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## 2.6 Thermische Ausdehnung von Gasen

Nach dem Gesetz von Gay-Lussac gilt bei konstanter Stoffmenge und für konstanten Druck, dass Volumen und Temperatur proportional zueinander sind, $V \sim T$. Für eine Erwärmung, dehnt sich das Gas aus. Nutzen Sie folgende Größen, um in Abhängigkeit von der Temperatur $T$ ein neues Volumen $V(T)$ auszudrücken:
Anfangsvolumen $V_0$, Anfangstemperatur $T_0$, Ausdehnungskoeffizient $\gamma$, neue Temperatur $T$

$$\Rightarrow \qquad V(T) \quad = \quad \underline{\hspace{8cm}}$$

Stellen Sie diese Gleichung nach dem Ausdehnungskoeffizienten $\gamma$ um. Nutzen Sie dann $\Delta V = V(T) - V_0$ und $\Delta T = T - T_0$, um den Ausdruck zu vereinfachen:

# 3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Wir betrachten ein abgeschlossenes Gasvolumen, dessen Druck, Temperatur und Volumen gemessen werden. Aufgabe ist es, den durch die ideale Gasgleichung beschriebenen Zusammenhang zwischen diesen drei Messgrößen experimentell zu untersuchen. Dazu werden die beiden Spezialfälle der isothermen Kompression und der isobaren Ausdehnung des Volumens verwendet, d. h. zum einen wird bei konstanter Temperatur die Druckzunahme des Gases bei Volumenkompression bestimmt, zum anderen wird bei konstantem Druck die Volumenänderung mit steigender Temperatur gemessen.

Dazu benutzen wir folgende Anordnung (vgl. Abb. 1):
Das zu untersuchende Gas (*hier:* Luft) befindet sich in einem Glaszylinder, welcher von einem ölgedichteten Glaskolben luftdicht abgeschlossen wird. Ein Schlauch am anderen Ende des Glaszylinders führt zu einem Drucksensor. Das Gasvolumen ist von einem Wasserbad umgeben, sodass die Temperatur des Gases möglichst genau festgelegt werden kann. Die Temperaturmessung erfolgt über einen Halbleiter-Temperatursensor, der in das Wasserbad eintaucht. Mit Hilfe eines Heizstrahlers unterhalb des Glaszylinders kann die Temperatur des Wasserbads, und damit die des Gases, erhöht werden.

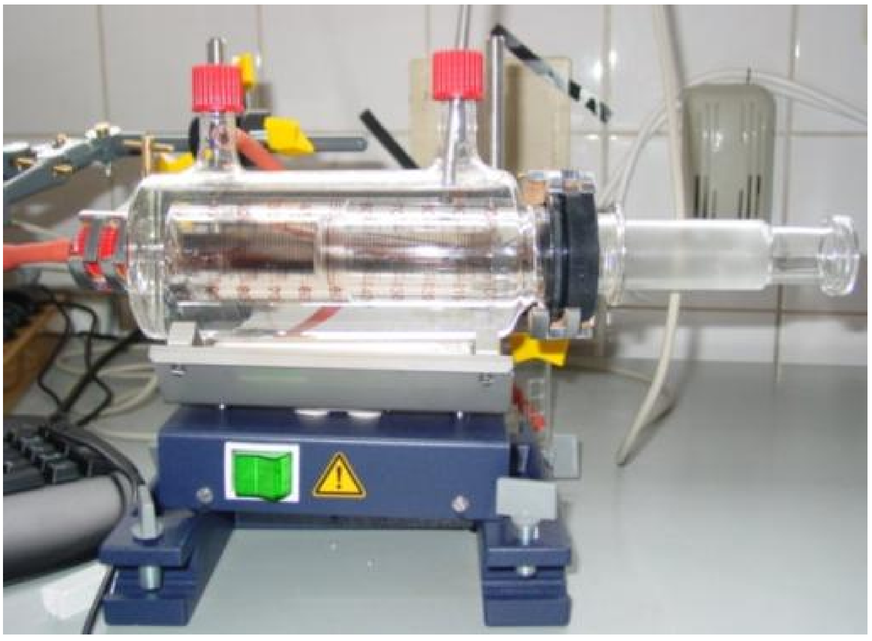

***Abbildung 1:*** *Detailfoto des Versuchsaufbaus. Oben rechts am Glaszylinder befindet sich ein Halbleiter-Temperatursensor, welcher in Kontakt mit dem Wasserbad steht. Oben links ist ein Überlaufschlauch angebracht. Auf der linken Seit des Glaszylinders befindet sich der Schlauch, welcher zum Drucksensor führt (Volumen ca. 3 ml). Rechts ist der im Idealfall gut geschmierte und somit leicht bewegliche Glaskolben. Unter dem Zylinder befindet sich ein Heizstrahler mit Schalter und Warnhinweis.*

Das aktuelle Volumen des Gases wird an der auf dem Glaszylinder aufgedruckten Skala und unter Verwendung der Markierung auf dem Kolben abgelesen. Die Erfassung des Drucks und der Temperatur erfolgt über einen Computer mit Hilfe des Programms `measure`.

## 4 Benötigte Formeln

Die allgemeine Gasgleichung für ideale Gase beschreibt die Abhängigkeiten der Zustandsgrößen Druck $p$, Volumen $V$, Stoffmenge $n$ und Temperatur $T$ untereinander. Sie lautet

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T. \tag{1}$$

Dabei ist $R \approx 8{,}314463\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ die universelle Gaskonstante[1].
Eine Menge von 1 mol eines idealen Gases nimmt unter Normalbedingungen, d. h. bei einem Normaldruck $p_0 = 1013{,}25\,\mathrm{mbar}$ und einer Temperatur $T_0 = 0\,°\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$, ein Volumen von $V_{\mathrm{m0}} = 22{,}41396954\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ (Liter pro Mol) ein[2].
Im Allgemeinen herrschen jedoch beim Experiment keine Normalbedingungen (insbesondere die Normaltemperatur $T_0 = 273{,}15\,\mathrm{K}$ wäre eher unangenehm), sodass die abweichenden Bedingungen in Druck und Temperatur bei der Verwendung des Molvolumens berücksichtigt werden müssen. Das Molvolumen $V_{\mathrm{m,mess}}$ eines idealen Gases bei einem Druck $p_{\mathrm{mess}}$ und der Temperatur $T_{\mathrm{mess}}$ ergibt sich aus

$$V_{\mathrm{m,mess}} = V_{\mathrm{m0}} \cdot \frac{T_{\mathrm{mess}}}{T_0} \cdot \frac{p_0}{p_{\mathrm{mess}}}. \tag{2}$$

Die Stoffmenge eines idealen Gases in Einheiten von Mol ist durch den Quotienten des Volumens des Gases $V$ in l (Liter) und dem Molvolumen $V_{\mathrm{m,mess}}$ in $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ (Liter pro Mol) gegeben,

$$n = \frac{V}{V_{\mathrm{m,mess}}}. \tag{3}$$

Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist das Volumen idealer Gase bei gleichbleibendem Druck und gleicher Stoffmenge direkt proportional zur Temperatur (vgl. Gl. (1)). Das Gas dehnt sich demnach bei Erwärmung aus. Für das Volumen $V$ bei einer beliebigen Temperatur $T$ gilt

$$V\,(T) = V_0\,(1 + \gamma(T - T_0)) = V_0\,(1 + \gamma \cdot \Delta T)\,, \tag{4}$$

wobei $V_0$ das Volumen des idealen Gases bei der Temperatur $T_0$ ist. Der Ausdehnungskoeffizient $\gamma$ ergibt sich somit aus

$$\gamma = \frac{1}{V_0} \frac{V(T) - V_0}{T - T_0} = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T}. \tag{5}$$

Für ideale Gase ist der Ausdehnungskoeffizient unabhängig von der Temperatur und hat den Wert $\gamma = \frac{1}{273{,}15\,\mathrm{K}} = 0{,}00366\,\mathrm{K}^{-1}$.

[1] Im Jahr 2019 wurden einige Konstanten des Internationalen Einheitensystems (SI) neu definiert (vgl. `https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/`). Da sich die universelle Gaskonstante aus Konstanten ergibt, deren Werte in diesem Zuge exakt festgelegt wurden, ist auch ihr Wert folglich fest definiert als $R = 8{,}31446261815324\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$.
[2] Gerundeter Literaturwert von `https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html`.

# 5 Durchführung (im Praktikum)

**Wichtig:** Sollten Sie feststellen, dass etwas an dem Versuchsaufbau kaputt ist, wie freiliegende elektrische Kabel o. Ä., melden Sie dies bitte umgehend der Assistentin/dem Assistenten. In diesem Versuch wird der Aufbau während der Durchführung stellenweise heiß. Achten Sie darauf sich nicht zu verbrennen. Seien Sie dazu besonders nahe dem beheizten Teil des Versuchsaufbaus vorsichtig. Obwohl sie in diesem Versuch keinen direkten Kontakt zum Wasser haben sollten, sind eventuelle Spritzer des Wassers zu beachten, falls es zu kochen anfangen sollte.

Die Datenaufnahme für Druck und Temperatur erfolgt in diesem Versuch automatisiert über den Computer, während die Datenauswertung per Hand erfolgen soll. Daher müssen alle Messerte aus der Versuchsdurchführung in den dafür vorgesehenen Tabellen protokolliert werden. Es ist generell nicht gestattet Speichermedien an den Computer anzuschließen, um beispielsweise Messdaten abzuspeichern.

Die Abdichtung des Gasvolumens geschieht durch einen dünnen Ölfilm auf dem Glaskolben. Um eine möglichst gleichmäßige Verteilung des Ölfilms für einen deutlich leichteren Gang des Kolbens zu gewährleisten, ist es notwendig den Glaskolben vor Versuchsbeginn genug zu bewegen und insbesondere auch zu drehen. Fassen Sie den Kolben *nur am hinteren Ende* an, nicht im geölten Bereich. Abgesehen von der Versuchsdurchführung ist der Kolben zur Vermeidung von Verschmutzung immer bis zum Anschlag einzuschieben.

**Das Messprogramm:**
Starten Sie den Computer und melden Sie sich über den AP-Benutzeraccount ohne Passwort an. Auf dem Desktop befindet sich ein Symbol für das Programm `measure`. Starten Sie das Programm und prüfen Sie, ob unter `Messgerät` bei `Cobra 3 Gasgesetze` ein Häkchen gesetzt ist. Drücken Sie den roten Button `Messaufnahme`. Überprüfen Sie in dem aufgehenden Fenster, ob die folgenden Einstellungen vorliegen:

| | |
|---|---|
| Drucksensor : | Eingang S1 |
| Temperatursensor : | Eingang S2 |
| Sensortyp : | Halbleiter |
| Volumenmessung : | manuell |
| Startvolumen : | 50 ml |
| Volumeninkrement : | 1 ml |
| Volumenrichtung : | Verkleinerung |

Automatisch berechnen (kein Häkchen)

$x$-Datensatz auf Messwertnummer (n)

Bis auf die Einstellung „Volumenrichtung“ sollte sich keine Einstellung über alle Versuchsteile hinweg ändern[3]. Durch Drücken von `weiter` erscheinen insgesamt drei Fenster: Ein Fenster für die Temperaturanzeige, eines für die Druckanzeige und eines zur Datenaufnahme (`Cobra3 Messaufnahme`).

[3]Da die Volumenmessung manuell eingestellt ist, könnten alle das Volumen betreffende Einstellungen ignoriert und direkt selbst abgelesene Messwerte genutzt werden. Der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber ergibt es jedoch Sinn, die korrekten Einstellungen vorzunehmen.

## 5.1 Isotherme Kompression (1)

Bei konstanter Temperatur wird die Druckzunahme das Gases bei Kompression des Volumens gemessen.

Spielen Sie ein wenig mit dem Versuchsaufbau und machen Sie sich mit der Apparatur vertraut. Denken Sie unbedingt daran den Kolben anfangs genug zu bewegen und insbesondere zu drehen, um das Öl gut zu verteilen. Um ein bestimmtes Gasvolumen einzustellen, lösen Sie vorsichtig die Schlauchverbindung am Adapter zum Drucksensor. Dann bewegen Sie den Glaskolben zur gewünschten Markierung und verbinden den Schlauch wieder mit dem Drucksensor. Das Gasvolumen wird auf einer Seite durch den Drucksensor und auf der anderen Seite durch den ölgedichteten Glaskolben begrenzt. Das Luftvolumen in der Schlauchverbindung zum Drucksensor (ca. 3 ml) muss somit später zum Gesamtvolumen hinzu addiert werden. Testen Sie, ob das System dicht ist, indem Sie den Glaskolben etwas nach innen drücken und wieder loslassen. Beobachten Sie, ob das System wieder zum Ausgangsvolumen zurückkehrt. Stellen Sie zu Beginn der Messreihe das Gasvolumen im Zylinder auf genau 50 ml ein. Womöglich müssen Sie den Schlauch dafür erneut vom Druckmesser lösen und neu befestigen.

Zur Messaufnahme muss am Computer das Fenster `Cobra3 Messaufnahme` aktiv sein. Die Aufnahme der Messwerte für Druck und Temperatur erfolgt über den Button `Messwert speichern`. Standardmäßig ist diese Schaltfläche fokussiert (gestrichelt umrandet), sodass ein einfaches Drücken der Leerzeichentaste an der Tastatur einem Klicken darauf gleicht.

Nehmen Sie den ersten Messwert beim Startvolumen von 50 ml auf. Reduzieren Sie durch Drücken des Glaskolbens schrittweise das Volumen um 1 ml, bis zu einem Endvolumen von 40 ml. Beachten Sie, dass das Drücken den Versuchsaufbau potenziell verschieben könnte. Dies lässt sich verhindern, indem Sie mit einer freien Hand den Messaufbau an geeigneter Stelle festhalten. Nehmen Sie für jeden ml-Schritt einen Messwert mit dem Computer auf. Beenden Sie die Messaufnahme durch den entsprechenden Button.

Nachdem Sie die Messaufnahme beendet haben, öffnet sich in der Regel automatisch ein Diagramm, welches Sie missachten können. Suchen Sie im Menü oben nach der Schaltfläche für die Messwerttabelle und öffnen Sie diese. Wahrscheinlich müssen Sie das Fenster der Messwerttabelle mit dem Mauszeiger an einer Ecke vergrößern, um alle Werte ablesen zu können. Übernehmen Sie die Werte, indem Sie Tabelle 1 ausfüllen. Denken Sie daran, einen Messfehler für alle gemessenen Größen abzuschätzen.

Die Prozedur dieser Messaufnahme wird später bei einer höheren Temperatur wiederholt. Die Heizphase dient jedoch zur Aufnahme der Daten aus dem folgenden Versuchsteil.

## 5.2 Isobare Volumenausdehnung

Bei konstantem Druck wird die Volumenzunahme des Gases bei Erhöhung der Temperatur gemessen.

Drücken Sie am Computer auf den Button `Messaufnahme`. Passen Sie im Fenster die Optionen auf diesen Versuchsteil an, d. h. stellen Sie die Volumenrichtung auf `Vergrößerung`.

**Isotherme Kompression (1)**

| Volumen V [ml] | Druck p [mbar] | Temperatur T [K] |
|---|---|---|
| 50 | | |
| 49 | | |
| 48 | | |
| 47 | | |
| 46 | | |
| 45 | | |
| 44 | | |
| 43 | | |
| 42 | | |
| 41 | | |
| 40 | | |

| $\Delta$V [ml] | $\Delta$p [mbar] | $\Delta$T [K] |
|---|---|---|
| | | |

***Tabelle 1:*** *Messwerte und -ungenauigkeiten zur ersten isothermen Kompression.*

**Isobare Volumenausdehnung**

| Volumen V [ml] | Druck p [mbar] | Temperatur T [K] |
|---|---|---|
| 50 | | |
| 51 | | |
| 52 | | |
| 53 | | |
| 54 | | |
| 55 | | |
| 56 | | |
| 57 | | |
| 58 | | |
| 59 | | |
| 60 | | |

| $\Delta$V [ml] | $\Delta$p [mbar] | $\Delta$T [K] |
|---|---|---|
| | | |

***Tabelle 2:*** *Messwerte und -ungenauigkeiten zur isobaren Volumenausdehnung.*

Kontrollieren Sie am Glaskolben, ob das Startvolumen genau 50 ml beträgt und korrigieren Sie es notfalls, indem Sie den Schlauch lösen und nach der Korrektur des Volumens neu befestigen. Bei dieser Gelegenheit können Sie erneut eine gute Verteilung des Öls sicherstellen, indem Sie den Kolben bei gelöster Schlauchverbindung nochmals bewegen und drehen. Beachten Sie den Anfangsdruck. Bei der folgenden Messung sollte der Druck ungefähr konstant bleiben.

Bevor Sie die Heizung anschalten (grüner Schalter), beachten Sie die folgenden Aspekte:
Das Wasserbad zum Temperieren des Gasvolumens soll nicht kochen. Schalten Sie daher die Heizung sofort aus, wenn die Temperatur einen Wert von 368 K ($\approx$ 95 °C) erreicht. Nach dem Ausschalten wird die Heizung noch etwas nachheizen, sodass die Temperatur dennoch etwas weiter ansteigt und das Wasser sogar kurz kochen könnte. Seien Sie in diesem Fall besonders vorsichtig, da überkochendes Wasser aus dem dafür vorgesehenen Schlauch läuft. Stellen Sie sicher, dass dieser Überlaufschlauch in ein Becherglas führt, wo das Wasser aufgefangen werden kann.
Der Glaszylinder und die Heizung darunter werden heiß. Achten Sie daher darauf sich nirgendwo am Versuchsaufbau zu verbrennen.

Schalten Sie nun die Heizung ein. Das Volumen im Glaskolben dehnt sich selbstständig aus. Nehmen Sie alle 1 ml Volumenvergößerung einen Messwert auf (wie zuvor über den Button `Messwert speichern`).

Bei einem Volumen von 60 ml oder wenn die oben genannte Temperatur von 368 K erreicht wird schalten Sie die Heizung aus. Beenden Sie die Messaufnahme und rufen Sie die `Messwerttabelle` auf. Sollte der Aufbau nicht genügend geschmiert sein (Öl nicht verteilt/Kolben verschmutzt/etc.), werden Ihnen ein paar Messwerte fehlen. Sprechen Sie in diesem Fall mit Ihrer Assistentin/Ihrem Assistenten, ob Ihre Messwerte ausreichen oder wie Sie sonst vorgehen sollten. Füllen Sie entsprechend Tabelle 2 aus.

Die erhöhte Temperatur dient zur folgenden Messaufnahme einer isothermen Kompression.

## 5.3 Isotherme Kompression (2)

Bei konstanter (erhöhter) Temperatur wird erneut die Druckzunahme des Gases bei Kompression des Volumens gemessen.

Drücken Sie am Computer auf den Button `Messaufnahme`. Stellen Sie die Volumenrichtung wieder auf `Verkleinerung`. Beachten Sie nun, dass der Aufbau stellenweise heiß ist! Vermeiden Sie insbesondere den Bereich direkt bei und über der Heizung anzufassen. Lösen Sie vorsichtig die Schlauchverbindung zum Drucksensor, stellen Sie das Volumen auf 50 ml ein und verbinden Sie den Schlauch wieder.

Wie im ersten Versuchsteil wird das Gas durch Drücken des Glaskolbens in 1 ml-Schritten auf 40 ml komprimiert. Halten Sie den Aufbau nicht an heißen Stellen fest! Es gibt noch genug Möglichkeiten den Aufbau an kalten Stellen davon abzuhalten zu verrutschen. Beenden Sie bei 40 ml die Messaufnahme, öffnen Sie die Messwerttabelle und protokollieren Sie die Messwerte in Tabelle 3.

Nach Abschluss der Messungen drücken Sie bitte den Glaskolben wieder bis zum Anschlag ganz nach innen in den Messzylinder (dazu muss die Schlauchverbindung gelöst werden), um Verschmutzungen zu vermeiden. Fahren Sie den Computer herunter und schalten Sie die Steckdosenleiste Ihres Aufbaus aus.

**Isotherme Kompression (2)**

| Volumen V [ml] | Druck p [mbar] | Temperatur T [K] |
|---|---|---|
| 50 | | |
| 49 | | |
| 48 | | |
| 47 | | |
| 46 | | |
| 45 | | |
| 44 | | |
| 43 | | |
| 42 | | |
| 41 | | |
| 40 | | |

| ΔV [ml] | Δp [mbar] | ΔT [K] |
|---|---|---|
| | | |

***Tabelle 3:*** *Messwerte und -ungenauigkeiten zur zweiten isothermen Kompression.*

**AT:** ______________________ ______________________________________

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

# 6 Auswertung (zu Hause)

In diesem Abschnitt werten Sie Ihre Messwerte aus. Folgen Sie dazu den nachfolgenden Anweisungen und füllen Sie die entsprechenden Stellen aus. Allgemeine Hinweise zu den hier benötigten Fehlerrechnungen finden Sie auch im Anhang in Abschnitt 9.1. Beachten Sie die korrekte Angabe von Ergebnissen, wozu das Runden bis auf signifikante Stellen zählt.

## 6.1 Isotherme Kompression

In beiden Fällen der isothermen Kompression gilt es das Volumen im Schlauch zwischen Glaszylinder und Drucksensor zu beachten. Korrigieren Sie dazu Ihre Werte für die gemessenen Volumina um entsprechende 3 ml.
Nutzen Sie die neuen Volumenwerte mit den jeweils zugehörigen Werten für Druck und Temperatur um den Quotienten $\frac{pV}{T}$ zu berechnen. Um den Fehler des Quotienten zu bestimmen müssen Sie Fehlerfortpflanzung anwenden. Notieren Sie die Zwischenschritte um zu zeigen, dass $\Delta \frac{pV}{T} = \frac{pV}{T}\sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta T}{T}\right)^2}$.

Füllen Sie mit diesem Wissen Tabelle 4 für beide isotherme Kompressionen aus.

Tragen Sie nun die berechneten Werte der Quotienten $\frac{pV}{T}$ mit deren Ungenauigkeiten (als Fehlerbalken) gegen die Nummer des Messwertes auf. Nutzen Sie die dafür vorgesehenen Diagramme in Abbildungen 2 und 3. Beachten Sie die dortigen Anmerkungen. Führen Sie dann jeweils eine grafische Geradenanpassung durch und denken Sie daran Steigungsdreiecke einzuzeichnen.
Es gilt herauszufinden, ob die Quotienten $\frac{pV}{T}$ konstant sind. Sollten die Quotienten einem konstanten Wert entsprechen, so wäre die Steigung der Geraden einer entsprechenden Auftragung gleich Null. Lücken für die Rechnungen finden Sie weiter unten.

**Isotherme Kompression (1)**

| korrigiertes Volumen V [ml] | $\frac{pV}{T}$ $\left[\frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}\right]$ | $\Delta\frac{pV}{T}$ $\left[\frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}\right]$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

**Isotherme Kompression (2)**

| korrigiertes Volumen V [ml] | $\frac{pV}{T}$ $\left[\frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}\right]$ | $\Delta\frac{pV}{T}$ $\left[\frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}\right]$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

***Tabelle 4:*** *Um das Schlauchvolumen korrigierte Volumina und die Quotienten $\frac{pV}{T}$ mit deren Ungenauigkeiten.*


***Abbildung 2: Isotherme Kompression (1)*** — *Grafische Auftragung und Geradenanpassung von $\frac{pV}{T}$ in Abhängigkeit der Messwert-Nr. $n$.*
*Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*
*(Die Achsen müssen nicht zwangsweise den Wert 0 auf der anderen Achse markieren!)*


***Abbildung 3: Isotherme Kompression (2)*** *— Grafische Auftragung und Geradenanpassung von $\frac{pV}{T}$ in Abhängigkeit der Messwert-Nr. $n$. Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten. (Die Achsen müssen nicht zwangsweise den Wert 0 auf der anderen Achse markieren!)*

**Rechnungen zu den grafischen Geradenanpassungen — isotherme Kompression**
In diesem Fall sind nur die Steigungeswerte von Interesse, die $y$-Achsenabschnitte können

daher hier ignoriert werden. Welche Einheit haben die Steigungswerte? $[a] =$ __________
Füllen Sie die folgenden Lücken aus, um die Steigungswerte und deren Ungenauigkeiten herauszufinden[4].

**Isotherme Kompression (1):**

$$a_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad\qquad} \qquad a_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \underline{\qquad\qquad} \qquad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \underline{\qquad\qquad}$$

**Isotherme Kompression (2):**

$$a_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad\qquad} \qquad a_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\qquad}{\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \underline{\qquad\qquad} \qquad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \underline{\qquad\qquad}$$

Als nächstes bestimmen Sie den jeweiligen Mittelwert $\overline{\frac{pV}{T}}$ aus den 11 Quotienten der Einzelmessungen für beide isotherme Kompressionen. Für die Fehler bestimmen Sie jeweils die Standardabweichung des Mittelwerts. Notieren Sie zuerst die nötigen Formeln und berechnen Sie dann die Werte.

**Formeln** des Mittelwerts und dessen Standardabweichung für $\overline{\frac{pV}{T}}$:

[4] Im allgemeinen Fall müssten für die Ungenauigkeit Betragsstriche verwendet werden. Da hier jedoch $a_{\min}$ und $a_{\max}$ in einer eindeutigen Relation stehen, ergeben sich für die Ungenauigkeiten mit den angegebenen Formeln automatisch positive Werte.

**Werte:**

| Isotherme Kompression (1) | Isotherme Kompression (2) |
|---|---|
| $\overline{\frac{pV}{T}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}$ | $\overline{\frac{pV}{T}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}$ |
| $\Delta\overline{\frac{pV}{T}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}$ | $\Delta\overline{\frac{pV}{T}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \frac{\text{mbar ml}}{\text{K}}$ |

Während der Durchführung sollte der Zylinder mit dem Kolben im Idealfall dicht schließen, sodass kein Gas aus dem Inneren entweichen kann. Mit dieser Annahme nutzen Sie die *jeweils ersten Messwerte* von Volumen, Druck und Temperatur beider Messreihen unter Verwendung von Gleichung (2) und Gleichung (3), um zunächst die Stoffmengen herauszufinden.

Beweisen Sie dazu die folgenden Formeln:

$$\Delta V_{\mathrm{m,mess}} = V_{\mathrm{m,mess}} \sqrt{\left(\frac{\Delta T_{\mathrm{mess}}}{T_{\mathrm{mess}}}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta p_{\mathrm{mess}}}{p_{\mathrm{mess}}}\right)^2}$$

$$\Delta n = n\sqrt{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta V_{\mathrm{m,mess}}}{V_{\mathrm{m,mess}}}\right)^2}$$

Um in $n = \frac{V}{V_{\mathrm{m,mess}}}$ (Gleichung (3)) Volumen und Molvolumen einfach verrechnen zu können, sollte das Volumen $V$ in Liter angegeben werden. Fangen Sie mit diesem Schritt an (Schlauchvolumen nicht vergessen!) und füllen Sie dann den Rest der folgenden Lücken aus. Nutzen Sie dafür die vorgegebenen Werte und Formeln aus Abschnitt 4 und die gerade nachgewiesenen Fehlerformeln. Beachten Sie vorgegebene Einheiten und Zehnerpotenzen.

**Werte:**

| Isotherme Kompression (1) | Isotherme Kompression (2) |
|---|---|
| $V$ = ________ $\mathrm{l}$ | $V$ = ________ $\mathrm{l}$ |
| $\Delta V$ = ________ $\mathrm{l}$ | $\Delta V$ = ________ $\mathrm{l}$ |
| $V_{\mathrm{m,mess}}$ = ________ $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ | $V_{\mathrm{m,mess}}$ = ________ $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ |
| $\Delta V_{\mathrm{m,mess}}$ = ________ $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ | $\Delta V_{\mathrm{m,mess}}$ = ________ $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{mol}}$ |
| $n$ = ________ $10^{-3}\mathrm{mol}$ | $n$ = ________ $10^{-3}\mathrm{mol}$ |
| $\Delta n$ = ________ $10^{-3}\mathrm{mol}$ | $\Delta n$ = ________ $10^{-3}\mathrm{mol}$ |

Nun kennen Sie die jeweilige Stoffmenge, zumindest zu Beginn der beiden isothermen Kompressionen. Formen Sie $pV = nRT$ (Gleichung (1)) so um, dass sich die universelle Gaskonstante $R$ aus dem Mittelwert $\overline{\frac{pV}{T}}$ und der Stoffmenge $n$ ergibt, also $R = \ldots$

Beweisen Sie, dass $\Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{\frac{pV}{T}}}{\overline{\frac{pV}{T}}}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta n}{n}\right)^2}$.

Ihnen liegt $\overline{\frac{pV}{T}}$ in $\frac{\mathrm{mbar\,ml}}{K}$ und $n$ in mol vor. Die universelle Gaskonstante $R$ wird in der Regel in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ angegeben. Wie kommen Sie von den vorliegenden Einheiten dahin, also welche Umrechung muss dafür stattfinden?

Berechnen Sie nun $R \pm \Delta R$ für Ihre Werte.

**Werte:**

| Isotherme Kompression (1) | Isotherme Kompression (2) |
|---|---|
| $R \quad = \quad \underline{\hspace{4cm}} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ | $R \quad = \quad \underline{\hspace{4cm}} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ |
| $\Delta R \quad = \quad \underline{\hspace{4cm}} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ | $\Delta R \quad = \quad \underline{\hspace{4cm}} \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ |

## 6.2 Isobare Volumenausdehnung

Tragen Sie Ihre Messwerte zur isobaren Volumenausdehnung als Volumen $V$ in Abhängigkeit der Temperatur $T$ auf. Nutzen Sie dafür das Diagramm in Abbildung 4 und beachten Sie wie zuvor die Anmerkungen. Führen Sie eine grafische Geradenanpassung durch und denken Sie erneut daran Steigungsdreiecke einzuzeichnen.

**Rechnungen zur grafischen Geradenanpassung — isobare Volumenausdehnung**
Erneut sind nur die Steigungeswerte von Interesse, $y$-Achsenabschnitte können ignoriert werden. Welche Einheit haben Steigungswerte hier? $[a] =$ __________
Füllen Sie die folgenden Lücken aus, um die mittlere Steigung $a \pm \Delta a$ zu finden.

$$a_{\min} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{3cm}} = \underline{\hspace{3cm}} \qquad a_{\max} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{3cm}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{3cm}} \qquad \Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \underline{\hspace{3cm}}$$

Die Steigung $a$ setzt sich aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zusammen. Welche Größe entspricht in diesem Fall $y$ und welche $x$, also welcher Bruch wird durch $a$ beschrieben?

$$y \ \widehat{=} \ \underline{\hspace{2cm}} \quad \& \quad x \ \widehat{=} \ \underline{\hspace{2cm}} \qquad \Rightarrow \qquad a \ \widehat{=} \ \underline{\hspace{3cm}}$$

Das Schlauchvolumen wurde in diesem Versuchsteil nicht direkt erwärmt und kann daher vernachlässigt werden. Damit beträgt das Anfangsvolumen $V_0 = 50\,\mathrm{ml}$ mit der dazugehörigen von Ihnen notierten Messungenauigkeit.
Nutzen Sie $\gamma = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T}$ (Gleichung (5)) um zusammen mit der Steigung aus der grafischen Geradenanpassung den Ausdehnungskoeffizienten $\gamma$ des Gases zu bestimmen.
Wie sieht diese Gleichung vereinfacht aus, wenn die Steigung $a$ benutzt wird?


***Abbildung 4: Isobare Volumenausdehnung*** — *Grafische Auftragung und Geradenanpassung vom Volumen $V$ in Abhängigkeit der Temperatur $T$.*
*Nutzen Sie eine sinnvolle Achsenaufteilung, wobei Sie den jeweiligen Wertebereich beachten sollten.*
*(Die Achsen müssen nicht zwangsweise den Wert 0 auf der anderen Achse markieren!)*

Beweisen Sie, dass $\Delta\gamma = \gamma\sqrt{\left(-\frac{\Delta V_0}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2}$.

Letztendlich ergibt sich damit für den Ausdehnunsgkoeffizienten:

$$\gamma \quad = \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \& \qquad \Delta\gamma \quad = \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

# 7 Diskussion

Entsprechen die Verläufe der Graphen zu den beiden isothermen Kompressionen Ihren Erwartungen? Falls nicht, was könnten mögliche Ursachen sein?

Entspricht der Verlauf des Graphen zur isobaren Volumenausdehnung Ihren Erwartungen? Falls nicht, woran könnte dies liegen?

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse (inklusive der berechneten Fehlerintervalle) für die Gaskonstante $R \pm \Delta R$ und den Ausdehnungskoeffizienten $\gamma \pm \Delta\gamma$ mit den Literaturwerten aus Abschnitt 4. Welche Gründe für Abweichungen könnte es geben?

**gesehen:** ________________ (Datum) ________________________ (Unterschrift Versuchsassistenz)

# 8 Quellen und weiterführende Literatur


- Fehlerrechnung und allgemeine Hinweise:
  https://www.astro.uni-koeln.de/AP/
- Meschede, Gerthsen Physik, Springer Berlin Heidelberg, 25. Aufl. 2015. Neuaufl. 2015
  http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45977-5
  [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, Berlin, 8. Aufl. 2018
  http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-54847-9
  [Zugang aus dem Netz der Uni Köln (UKLAN) möglich]
- Tipler: Physik, Spektrum, Springer Berlin Heidelberg, 8. Aufl., 2019
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg + Teubner


## Feedback

Hier ist nach Ihrem Feedback zu dieser Anleitung gefragt. Gibt es etwas, das Sie an der Versuchsanleitung inhaltlich oder technisch ändern würden? Ist beispielsweise etwas nicht oder unzureichend erklärt, Lücken zu klein, etc.? Änderungsvorschläge könnten schon für die nächsten Praktikumsteilnehmer umgesetzt werden.

# 9 Anhang

## 9.1 Fehler(formeln) und Geradenanpassung

### 9.1.1 Mittelwert und dessen Standardabweichung

Angenommen es liegen $n$ Werte $x_i$ einer Größe $x$ mit gleicher Ungenauigkeit vor, also $\Delta x_i = \Delta x$ für alle $i$ mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Dann ergibt sich deren Mittelwert $\overline{x}$ wie folgt:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Als Fehler wird insbesondere im Zuge dieses Praktikums die Standardabweichung des Mittelwerts genutzt, nicht zu verwechseln mit der Standardabweichung einer Einzelmessung, deren Formel recht ähnlich ist, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Die relevante Formel der Standardabweichung des Mittelwerts, hier als $\Delta\overline{x}$ bezeichnet, lautet

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Sollte es vorkommen, dass für alle $i$ gilt $\overline{x} = x_i$, so würde der Wert $\Delta\overline{x}$ verschwinden. In diesem Fall ist eine sinnvolle Alternative die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu nutzen, was zu $\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$ führt, da alle $x_i$ die gleiche Ungenauigkeit $\Delta x$ besitzen.

Ist der Mittelwert von nur zwei Werten $x_1$ und $x_2$ gesucht, so vereinfacht sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts drastisch und wir erhalten

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \& \qquad \Delta\overline{x} = \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|.$$

Häufig gilt $x_2 > x_1$, sodass $\Delta\overline{x} = \frac{x_2 - x_1}{2}$.

### 9.1.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Die Gaußsche Fehlerfortpflanzung beschreibt den Einfluss fehlerbehafteter Größen $x_i$ auf die Ungenauigkeit einer sich aus diesen zusammensetzenden Größe $y$. Als ein verallgemeinertes Beispiel ist der Wert von $y$ mit dessen Ungenauigkeit $\Delta y$ zu bestimmen. Der Wert $y$ hängt von mehreren anderen Größen $x_i$ ab, $y\,(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Alle Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ besitzen jeweils eine Ungenauigkeit $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$. Dann ergibt sich $\Delta y$ aus

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\Delta x_3\right)^2 + \ldots},$$

wobei die Brüche $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ partiellen Ableitungen von $y$ nach einer Größe $x_i$ entsprechen.

**Ein Beispiel:**
Um die Geschwindigkeit $v = \frac{l}{t}$ eines Fahrzeugs in einer Tempo 30-Zone zu bestimmen wird die Zeit $t$ gestoppt, welche es für eine Strecke $l$ benötigt. Beide Werte liegen vor: $l = (20{,}0 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m}$ und $t = (2{,}2 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}$, also $v = \frac{20{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}2\,\mathrm{s}} \approx 9{,}0909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Fehlerformel lautet hier

$$
\begin{aligned}
\Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta l\right)^2 + \left(-\frac{l}{t^2}\Delta t\right)^2} \qquad (6) \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\cdot\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{l}{t}\cdot -\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{l}{t}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right)} \\
&= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Die Umformungen bis Gleichung (7) sind als generelle Vorlage zu verstehen, verglichen mit Gleichung (6) ist in diesem Beispiel keine starke Vereinfachung zu beobachten. In einigen Fällen ist dieses Schema jedoch sehr sinnvoll, insbesondere wenn dadurch lange Formeln letztendlich stark gekürzt werden. Allerdings ist zu beachten, dass es nicht auf alle Formeln anwendbar und somit jeder Fall einzeln abzuwägen ist.

Hier ergibt sich durch Einsetzen der Werte $\Delta v \approx 0{,}857\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gerundet und mit umgerechneten Einheiten ist letztendlich $v \pm \Delta v = (9{,}1 \pm 0{,}9)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx (33 \pm 3)\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

### 9.1.3 Grafische Geradenanpassung

Bei einer grafischen Geradenanpassung werden die Parameter $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ einer Geradengleichung der Form $y = y\,(x) = a \cdot x + b$ bestimmt. Die Bestimmung der Werte erfolgt anhand der Auftragung mehrerer Wertepaare $(x_i|\,y_i)$ und deren Ungenauigkeiten $\Delta x_i$ und/oder $\Delta y_i$ in einem Diagramm, in welchem die Werte einem möglichst linearen Verlauf entsprechen. Falls nur jeweils die $x_i$- oder die $y_i$-Werte Ungenauigkeiten besitzen, sind die entsprechenden Fehlerbalken im Diagramm zu beachten. Sollten Ungenauigkeiten beider Größen vorliegen[5], sind die entsprechenden Fehlerflächen relevant.

Ein essentieller Schritt dieser Geradenanpassung ist die Findung von den zwei sogenannten Extremalgeraden, also einer Geraden mit möglichst kleiner und einer mit möglichst großer Steigung, welche beide gewissen Regeln unterliegen:

1. Die Gerade schneidet ²/₃ aller Messwerte in deren Fehlerbereichen.

[5] In der realen Anwendung kann es auch vorkommen, dass Ungenauigkeiten so klein ausfallen, dass sie nicht sinnvoll im Diagramm dargestellt werden können. Dies gleicht effektiv dem Fall, dass nur von der jeweils anderen Größe Ungenauigkeiten vorliegen.

2. Die restlichen Messwerte sind nicht weiter als der doppelte Fehlerabstand von der Geraden entfernt.

Es kommt vor, dass die zweite Regel nicht ganz erfüllt werden kann. Falls möglich sollte jedoch darauf geachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass die Geraden unabhängig voneinander erstellt werden. Die Gerade maximaler Steigung kann durchaus andere Werte schneiden, als die Gerade minimaler Steigung. Häufig lassen sich nur so die wirklich größte und kleinste Steigung finden.
Wenn die Punkte im Diagramm eine deutliche Abweichung von den erforderlichen Regeln benötigen würden ist die Überlegung notwendig, ob eine rechnerische Geradenanpassung nicht sinnvoller wäre. Sollten nur einzelne Werte deutlich sichtbar aus dem linearen Verlauf fallen, so können diese ausgeklammert und mit zusätzlicher Begründung als Ausreißer unbeachtet bleiben.
Um die Extremalgeraden zu finden ist es sinnvoll beispielsweise ein langes Lineal an das Diagramm zu halten, um mehrere potentielle Geraden mit minimaler/maximaler Steigung auszuprobieren.

Im nächsten Schritt werden die Steigungswerte der Extremalgeraden $a_{\mathrm{min/max}}$ und die $y$-Achsenabschnitte $b_{\mathrm{min/max}}$ bestimmt. Damit die relativen Fehler klein ausfallen, sind dem Diagramm entsprechend möglichst große Steigungsdreiecke einzuzeichnen. An diesen werden dann unter Beachtung der Achsenskalierung die jeweiligen $\Delta x$ und $\Delta y$ abgelesen. Dabei ist zu beachten, dass es sich hier nicht um Ungenauigkeiten, sondern Differenzen, handelt. Die Steigungen der Extremalgeraden ergeben sich aus $a = \pm\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, ob die jeweilige Gerade steigend (+) oder fallend (−) ist. Sollte eine Achse entgegen der Norm invertiert beschriftet sein, ist dies natürlich bei der Vorzeichenwahl zu berücksichtigen.
Die Werte $b_{\mathrm{min/max}}$ können entweder direkt im Diagramm abgelesen werden oder müssen mittels der Geradensteigung und einem Punkt auf der Geraden mit Hilfe der umgestellten Geradengleichung $b_{\mathrm{min/max}} = y - a_{\mathrm{min/max}} \cdot x$ bestimmt werden.

Zuletzt wird die Ausgleichsgerade bestimmt, indem die vorherigen Geradenparameter einfach gemittelt werden. Die Ungenauigkeiten der entsprechenden Mittelwerte bauen somit jeweils auf nur zwei Werten auf, wodurch sich die Formel der Standardabweichung des Mittelwerts stark vereinfacht:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_{\mathrm{max}} + a_{\mathrm{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta a = \frac{a_{\mathrm{max}} - a_{\mathrm{min}}}{2}, \\ b &= \frac{b_{\mathrm{max}} + b_{\mathrm{min}}}{2} \qquad \& \qquad \Delta b = \left|\frac{b_{\mathrm{max}} - b_{\mathrm{min}}}{2}\right|. \end{aligned}$$

*Anmerkung:* Allgemein müssten auch bei $\Delta a$ Betragsstriche stehen. Da $a_{\mathrm{min}}$ und $a_{\mathrm{max}}$ jedoch in einer festen Relation stehen, ergibt sich für $\Delta a$ automatisch ein positiver Wert.

Würde diese Gerade im Diagramm eingezeichnet werden, sollte sie die beiden Extremalgeraden genau mittig schneiden.

**Ein Beispiel:**
In Abbildung 5 ist eine grafische Geradenanpassung mit neun Werten eines fiktiven Experiments und deren Ungenauigkeiten aufgetragen. Es ist die zu den Daten gehörige Geschwindigkeit $v \pm \Delta v$ in $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ gesucht.

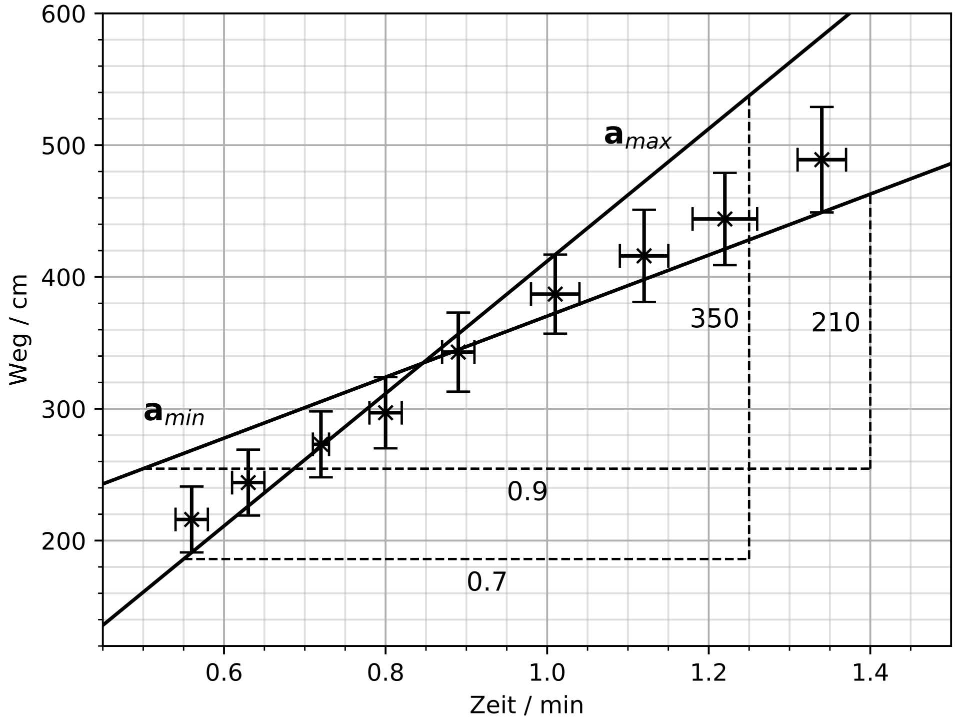


***Abbildung 5:*** *Vollständige grafische Geradenanpassung. Extremalgeraden und Steigungsdreiecke sind eingezeichnet und beschriftet. Dazugehörige Rechnungen befinden sich im Text.*

Die Extremalgeraden werden jeweils durch das Schneiden von sechs Werten und deren Fehlerbalken/-flächen bestimmt, während die übrigen drei Werte möglichst noch im doppelten Fehlerabstand getroffen sind. Zur Berechnung der Steigungswerte werden die Steigungsdreiecke benutzt, also im Beispiel hier

$$a_{\text{min}} = \frac{210\,\text{cm}}{0{,}9\,\text{min}} \approx 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad a_{\text{max}} = \frac{350\,\text{cm}}{0{,}7\,\text{min}} = 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

Da beide Geraden von links nach rechts steigen, haben sie positive Steigungswerte. Die $y$-Achsenabschnitte der beiden Extremalgeraden lassen sich in diesem Fall nicht einfach aus dem Diagramm ablesen und müssen somit berechnet werden. Indem nun ein beliebiger Punkt einer Gerade zusammen mit der jeweiligen Steigung verwendet wird, lassen sich die gesuchten Werte finden. Für dieses Beispiel wird für $a_{\text{min}}$ bei $x = 0{,}6\,\text{min}$ und für $a_{\text{max}}$ bei $x = 1{,}3\,\text{min}$ geschaut, sodass sich die beiden Punkte $(0{,}6\,|\,280)$ und $(1{,}3\,|\,560)$ ergeben. Die $y$-Achsenabschnitte sind dann

$$\begin{aligned} b_{\text{min}} &= 280\,\text{cm} - 233{,}33\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 0{,}6\,\text{min} &\approx 140\,\text{cm}, \\ b_{\text{max}} &= 560\,\text{cm} - 500\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot 1{,}3\,\text{min} &= -90\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Nun gilt es noch die oben genannten Formeln für $a \pm \Delta a$ und $b \pm \Delta b$ anzuwenden und es ergibt sich

$$a \pm \Delta a = (366{,}665 \pm 133{,}335)\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \qquad \& \qquad b \pm \Delta b = (25 \pm 115)\,\text{cm}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Steigungswerte nicht der gewünschten Angabe von Ergebnissen entspricht, da die Ergebnisse hier nicht signifikant gerundet sind! Diese genaueren Werte werden genutzt, um weitere Rechnungen durchzuführen, in diesem Fall also die Umrechnung in die gewünschten Einheiten.
Durch Umrechnung der Steigunsgwerte ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $v \approx (6{,}111 \pm 2{,}222) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also gerundet $v = (6{,}1 \pm 2{,}2) \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.