

Versuch M8 für Physiker

Schwingende Saite

I. Physikalisches Institut, Raum HS102
Stand: 28. April 2022



generelle Bemerkungen

- bitte verwendeten Versuchsaufbau angeben (z.B. x. von links/rechts)
- bitte Versuchspartner angeben
- bitte Versuchsbetreuer angeben
- bitte nur handschriftliche Auswertung

1 Einleitung

Schwingende mechanische Systeme (z.B. schwingende Saiten, Paukenfelle oder Glocken) sind nicht nur für die Physik ein interessantes Thema, sondern auch für die Musik. In diesem Versuch soll die schwingende Saite dazu benutzt werden, um die Wellengleichung kennenzulernen. Mit den gelernten Zusammenhängen soll die Dichte des schwingenden Stahldrahtes bestimmt werden.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

- Herleitung der Wellengleichung (6) der schwingenden Saite und Lösung derselbigen unter Verwendung der Anfangsbedingungen (12).
- Wie sehen die einzelnen Moden einer schwingenden Saite graphisch aus?
- Was sind longitudinale und transversale Wellen und welche Form der Welle liegt in diesem Versuch vor?
- Wie wird im vorliegenden Versuch die Frequenz der Stroboskopscheibe bestimmt?
- Wie sieht die Fourierreihe einer Dreiecksfunktion aus? (Linearer Anstieg mit dann gleichem linearem Abfallen)? Was hat das mit dem vorliegenden Versuch zu tun?

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

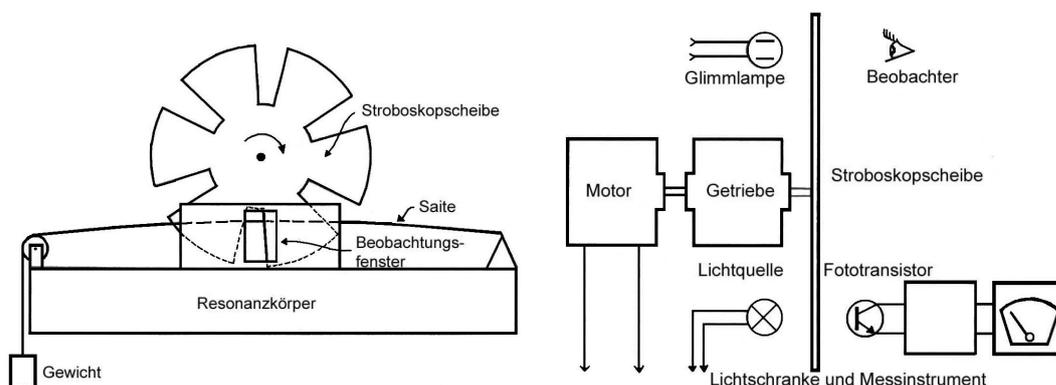


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus

Eine Saite (Länge l , Durchmesser \varnothing bzw. Querschnittsfläche A , Dichte ρ) wird mit einem Gewicht der Masse m gespannt. Die daraus resultierende Schwingungsfrequenz der Saite wird mithilfe einer sich drehenden Stroboskopscheibe gemessen (siehe Skizze links). Diese Scheibe besitzt in regelmässigen Abständen Spalte, so dass die Saite nur in periodischen Abständen sichtbar ist. Stimmt diese Periode (Stroboskopfrequenz) mit der Schwingungsdauer (Schwingungsfrequenz) der Saite überein, was durch Ändern der Motordrehzahl erreicht werden kann, so beobachtet man im Fenster ein stehendes Bild. (Frage: Ist dieses Verfahren eindeutig? Was muss bei dieser Messmethode beachtet werden?)

Die Stroboskopscheibe rotiert zwischen einer Lichtschranke, die aus einer Lichtquelle und einem Fototransistor mit anschliessender Nachweiselektronik besteht (Skizze rechts). Der von einem Messinstrument angezeigte Strom ist zur Stroboskopfrequenz direkt proportional. Zur Eichung des Messinstrumentes beobachtet man stroboskopisch das Leuchten einer Glimmlampe, die mit Netzspannung (220 V AC, 50 Hz) betrieben wird. Die verwendete Glimmlampe besitzt 2 gleichartige Elektroden. Die Glimmentladung brennt sichtbar an der Elektrode, die gegenüber der anderen eine positive Spannung besitzt. Das Leuchten wechselt daher mit einer Frequenz von 50 Hz von einer Elektrode zur anderen. Bei der stroboskopischen Beobachtung der Glimmentladung mit einer Stroboskopfrequenz von 50 Hz erhält man hier jedoch ein stehendes Bild, d.h. die Glimmentladung scheint nur um eine Elektrode zu brennen. Um mehr als nur einen Frequenzwert zu erzeugen, verwendet man eine Stroboskopscheibe mit 4 Lochkränzen, mit jeweils 6, 12, 18 bzw. 24 Löchern auf dem Umfang. Die Glimmlampe steht fest auf dem Umfang mit 18 Löchern, während die Lichtschranke auf die anderen Lochkränze verschoben werden kann.

4 Benötigte Formeln

Wird die Saite mit der Kraft $F = mg$ gespannt, so sind die möglichen Schwingungsfrequenzen der Saite durch

$$f = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \quad (1)$$

gegeben. Mit $n = 1$ erhält man die Frequenz der Grundschwingung der Saite. Die Schwingungen mit $n = 2, 3, 4, ..$ bezeichnet man als Obertöne. Die Intensitätsverhältnisse der Obertöne sind für jedes Musikinstrument unterschiedlich und machen deren Klang aus. Im vorliegenden Versuch soll nun die Dichte ρ der Saite bestimmt werden, für die sich folgender Zusammenhang ergibt ($n = 1$):

$$\rho = \frac{1}{4f^2l^2} \frac{mg}{A} \quad (2)$$

5 Durchführung (im Praktikum)

5.1 Dimensionen der Saite

Messen Sie die Länge der Saite mit einem Bandmaß und schätzen Sie den Messfehler (Ablesefehler) ab.

Messen Sie den Durchmesser der Saite mit der Mikrometerschraube an 3 verschiedenen Stellen und schätzen Sie den Messfehler (Ablesefehler) ab.



Abbildung 2: Mikrometerschraube

5.2 Kalibrierung des Frequenzmessgerätes

Wie in Abschnitt (3) beschrieben, wird die Stroboskopfrequenz nicht direkt angezeigt, sondern nur ein dazu proportionaler Strom ($f \propto I$). Die Steigung und der Offset dieses linearen Zusammenhangs muss also mit einer Kalibrierungsmessung erst ermittelt werden. Dazu wird eine Stroboskopscheibe mit 4 Lochkränzen (6, 12, 18 bzw. 24 Löcher) auf die Motorachse geschraubt. Die Glühlampe steht fest auf dem Umfang mit 18 Löchern, während die Photozelle auf die anderen Umfänge verschoben werden kann (welche Frequenzen kann man dadurch erzeugen?). Notieren Sie die zu den 4 Frequenzen gehörigen Stromwerte. Beachten Sie bitte dabei, dass auch mit einer zu klein eingestellten Lochfrequenz ein stehendes Bild der Glühlampe eingestellt werden kann, siehe unteres Bild.

Beachten Sie beim Einstellen der Werte ausserdem, wie genau die Frequenzen eingestellt werden können. Welcher Fehler dominiert die Ungenauigkeit? Kann man die Frequenzen besser einstellen als man sie auf dem Messgerät ablesen kann, oder kann man genauer ablesen, als man einstellen kann?

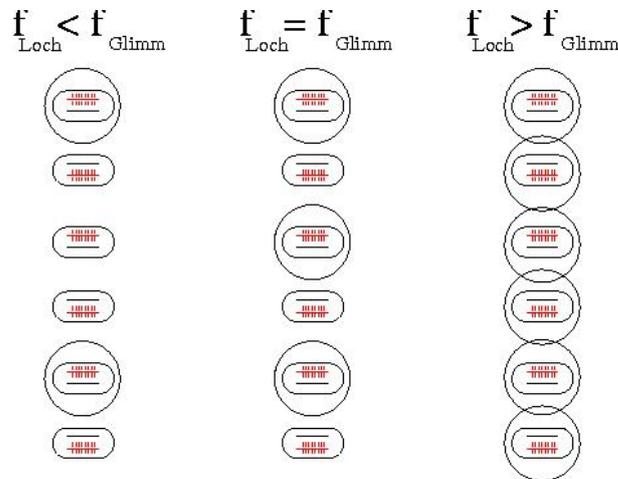


Abbildung 3: Einstellen der richtigen Stroboskopfrequenz

5.3 Messung der Schwingungsfrequenz der Saite

5.3.1 Stroboskopische Methode

Messen Sie die Frequenz der schwingenden Saite für mindestens 5 verschiedene Gewichte im Bereich von 0,5 kg bis 10 kg. Benutzen sie dazu die Stroboskopscheibe mit den 6 Spalten. Beachten Sie dabei folgendes:

- Wie genau kann man die Rotation der Stroboskopscheibe einstellen und wie genau kann man den resultierenden Strom ablesen? Notieren Sie sich den dominierenden Frequenzfehler!
- Beachten Sie, dass mit Massen kleiner als 1 kg die Saite nicht mehr vernünftig gespannt werden kann. Außerdem kann man bei zunehmend kleineren Frequenzen das stehende Bild schlechter erkennen. Eine Messung unterhalb von 1kg ist trotzdem hilfreich, um die Wurzelabhängigkeit $f \propto \sqrt{m}$ (siehe Gleichung 1) besser zu erkennen. Man sollte aber im Auge behalten, dass dieser Wert einer der schlechtesten sein könnte.

5.3.2 Akustische Zusatzmessung

Zusätzlich kann die Frequenz der Saite über ein Mikrofon gemessen werden, das an den Resonanzkörper des Aufbaus gehalten wird. Das Mikrofon ist an einen Computer angeschlossen, auf dem ein FastFourierAnalyse-Programm läuft. Mit diesem Programm kann das Frequenzspektrum der schwingenden Saite samt der Obertöne aufgenommen werden. Da das Mikrofon unterhalb von 50 Hz deutlich an Empfindlichkeit verliert, sollte ein ausreichendes Gewicht verwendet werden.

Führen Sie eine Vergleichsmessung mit dem höchsten Gewicht, welches bei der stroboskopischen Messung verwendet wurde, durch und notieren Sie alle erkennbaren Frequenzen.

Welche Frequenz ist der Grundton und wo sind die Obertöne? Schätzen Sie die Genauigkeit beim Ablesen ab und skizzieren Sie das entstandene Bild im Protokollheft!

Freiwillig: Wer eigene Musikinstrumente (Stimmgabel, Geige, Trommeln, Becken, Glocken, Weingläser) auf ihr Frequenzspektrum überprüfen möchte, kann dies gerne tun (bitte keine übermäßige Lärmbelästigung der anderen Praktikumsgruppen).

6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (Zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, Was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

6.1 Kalibrierung

Das Messgerät wird kalibriert, indem man eine Geradenanpassung in einem $f(I)$ -Diagramm anfertigt (Literatur zur Fehlerrechnung ist im Anhang). Bestimmen Sie die Steigung und den y-Achsenabschnitt des Graphen, so dass man die folgenden Messwerte in Frequenzen umrechnen kann. Ein y-Achsenabschnitt sollte bei einer Kalibrierung immer berücksichtigt werden, es sei denn, er ist so klein, dass er vernachlässigt werden kann. Dies ist dann aber schriftlich zu dokumentieren.

6.2 Frequenzbestimmung

Rechnen Sie mit Hilfe der Eichgeraden die gemessenen Stromwerte in Frequenzen um und tragen Sie die Frequenz gegen die angehängte Masse auf. Was für einen Verlauf erwartet man? Tragen Sie ausserdem den Logarithmus der Frequenz gegen den Logarithmus der angehängten Masse auf. Erklären Sie, warum hier ein linearer Verlauf zu erwarten ist und unter welchen Umständen der lineare Verlauf nicht entstehen würde. (Tipp: Obertöne). Welche Steigung hat diese doppelt logarithmische Auftragung? Überprüfen Sie ihre Aussage, indem Sie eine Geradenanpassung an Ihren Graphen machen.

6.3 Bestimmung der Dichte der Saite

Bestimmen Sie für jeden Messpunkt die Dichte der Saite (inkl. Fehler). Vergleichen Sie die erhaltenen Dichten mit dem Literaturwert und korrigieren Sie die Frequenzen, falls ein Oberton gemessen wurde. Bilden Sie das Mittel der gelungenen Messungen und den dazugehörigen Fehler. Bestimmen Sie ausserdem die Dichte der Saite aus der akustischen Messung.

6.4 Anregung für möglichen Diskussionen

Der Versuch der schwingenden Saite ist bezüglich seiner Auswertung nicht so umfangreich. Er bietet aber viele Möglichkeiten zur Diskussion. Folgende Fragen sollten in der Diskussion angesprochen werden (je nach Messergebnissen auch nur kurz).

6.4.1 Kalibrierung

Was ist die dominierende Fehlerquelle bei der Kalibrierung? Wie könnte man diese ausbessern? Wie wurde mit dem Offset (y -Achsenabschnitt) verfahren? Wo könnte er hergekommen sein?

6.4.2 Frequenzbestimmung

Was war die dominierende Fehlerquelle? Konnte die Theorie der schwingenden Saite im Rahmen der Messgenauigkeit bestätigt werden? Vergleichen Sie die stroboskopische mit der akustischen Messmethode. Welche ist besser (Tipp: Frequenzbereich)?

6.4.3 Bestimmung der Dichte

Diskutieren Sie die Einzelergebnisse wie auch den Mittelwert der Messergebnisse. Sind einzelne Messungen besonders schlecht geworden? Wenn ja, warum? Was ist die dominierende Fehlerquelle, die den Fehler so groß macht? Wie ist die Saitenschwingung als Methode zur Bestimmung einer Dichte einzuschätzen (verglichen mit einer Volumen- und Gewichtsmessung)?

7 Anhang: Herleitung der Formeln

7.1 Herleitung der Wellengleichung

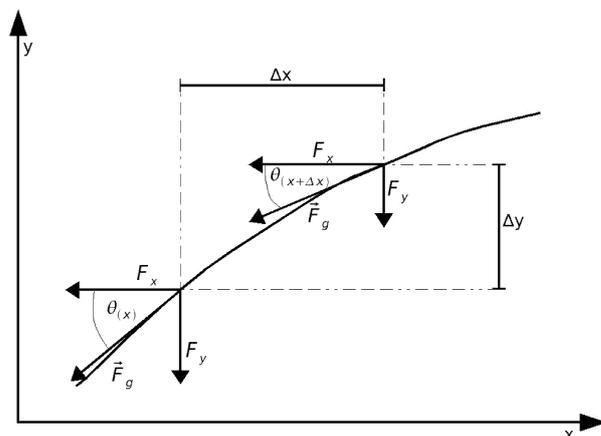


Abbildung 4: Kräfte diagramm der schwingenden Saite

Wir betrachten eine Saite, die mit der Kraft $F = F_x = mg$ gespannt ist und in y -Richtung schwingt. Die rücktreibende Kraftkomponente in y -Richtung ist $F_y = F_x \sin \theta$ (siehe Abbildung 4). Die Änderung dieser Kraftkomponente entlang der x -Richtung ist

$$\frac{dF_y}{dx} = \frac{d}{dx} F_x \sin \theta . \quad (3)$$

Wobei F_x gegen Änderung in x -Richtung konstant ist. Betrachtet man das Massenelement $dm = \Delta l \rho A$, so kann man auf der linken Seite die Kraft durch $dF_y = dm \ddot{y} = \Delta l \rho A \ddot{y}$ ersetzen:

$$\frac{\ddot{y} \Delta l \rho A}{\Delta x} = F_x \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta . \quad (4)$$

Da für kleine Auslenkungen der Saite $\frac{\Delta l}{\Delta x} \approx 1$ ist und für den Sinus bei kleinen Winkeln die üblichen Näherungen verwendet werden dürfen, folgt

$$\begin{aligned} \ddot{y} \rho A &= F_x \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta \\ &\approx F_x \frac{\partial}{\partial x} \tan \theta \\ &= F_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \Leftrightarrow \ddot{y}(x, t) &= \frac{F_x}{\rho A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot y(x, t) . \end{aligned} \quad (5)$$

oder mit $c^2 = \frac{F_x}{\rho A}$ die Wellengleichung

$$\ddot{y}(x, t) = c^2 \cdot y''(x, t) . \quad (6)$$

7.2 Lösung der Wellengleichung

Gleichung (6) ist eine Differentialgleichung einer Funktion $y(x, t)$ mit zwei Variablen x und t , nach denen jeweils zweimal abgeleitet wird. Zur Lösung dieser Differentialgleichung wird ein Produktansatz $y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt, was zu der Gleichung

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 \quad (7)$$

führt. die t - und x -abhängigen Teile lassen sich auf die zwei Seiten der obigen Gleichung separieren und müssen daher konstant sein. Diese Konstante wird (in weiser Voraussicht) mit $-\omega^2$ bezeichnet. Man erhält also die zwei separierten Differentialgleichungen

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2 \quad (8)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \quad (9)$$

die sich wie folgt leicht lösen lassen.

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \Rightarrow T(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) &= 0 \\ \Rightarrow X(x) &= C \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \end{aligned} \quad (11)$$

7.3 Einsetzen der Anfangsbedingungen

Da die Saite mit Länge l am Anfang wie an ihrem Ende fixiert ist, muss gelten

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (12)$$

Somit fällt der Cosinus als Lösung weg ($D = 0$), und mit $X(l) = 0$ erhält man die Bedingung $\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\Big|_{x=l} = 0$, mit der sich die Kreisfrequenz ω festlegen lässt.

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c}l &= n\pi \\ \Rightarrow \omega &= \frac{n\pi c}{l} \\ \Rightarrow f &= \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F_x}{\rho A}} \\ &= \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} \end{aligned} \quad (13)$$

Mit $n = 1$ erhält man die Frequenz der Grundschiwingung der Saite. Die Schwingungen mit $n = 2, 3, 4, \dots$ bezeichnet man als Obertöne. Die Intensitätsverhältniss der Obertöne sind für jedes Musikinstrument unterschiedlich und machen deren Klang aus.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002 (Kapitel 4)
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994 (Kapitel 13)
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001 (Kapitel 11)
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Berkeley Physics Course, Vol.3: Waves
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner

9 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumseinleitung dargelegt wurden.