

I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M8: Schwingende Saite



PRAKTIKUM A FÜR NEBENFÄCHLER

Version vom 26. April 2021

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbereitung: Antestat des theoretischen Hintergrundwissens	2
2.1	Moden einer schwingenden Saite	2
2.2	Was sind longitudinale und transversale Wellen und welche Form der Welle liegt in diesem Versuch vor?	3
2.3	Fast Fourier Analyse	3
2.4	Einführung in die Wellengleichung	4
2.4.1	Anfangsbedingungen	5
2.5	Skizze	6
2.6	Versuchsdurchführung	6
2.7	Ziel des Versuchs	7
3	Durchführung	8
3.1	Dimensionen der Saite	8
3.2	Kalibrierung der Stroboskop Messung	8
3.3	Stroboskop Messung mit verschiedenen Gewichten	9
3.4	FFT Messung	10
4	Auswertung	11
4.1	Eichung	11
4.2	Frequenzbestimmung	13
4.3	Geraden Anpassung für die doppeltlogarithmische Auftragung	16
4.4	Bestimmung der Dichte des Saitenmaterials	17
5	Diskussion	19
6	Literatur	20

1 Einleitung

Schwingende mechanische Systeme (z.B. schwingende Saiten, Paukenfelle oder Glocken) sind nicht nur für die Physik ein interessantes Thema, sondern auch für die Musik. In diesem Versuch soll die schwingende Saite dazu benutzt werden, um die Wellengleichung kennenzulernen. Mit den gelernten Zusammenhängen soll die Dichte des schwingenden Stahldrahtes bestimmen werden.

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (Gewichteter) Fehler des Mittelwerts, Grafische Geradenanpassung) vertraut machen.

Der Umfang dieses Versuchs macht es nötig, dass sie der Ordnung halber die Blätter mittels Schnellhefter o.ä. binden. Bitte Lochen Sie die Blätter und heften Sie sie sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen wird die Auswertung durch den Assistenten verweigert werden.

Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben, diese geben den Umfang vor, der an entsprechender Stelle erwartet wird. sollte der Platz dennoch nicht ausreichen fügen Sie ganze Blätter ein.

Beachten Sie bitte, dass die Lücken und Fragestellungen in den Abschnitten 2 und 4 vollständig zu beantworten sind und am Versuchstag vorgezeigt werden müssen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die Assistentin/der Assistent Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums^a vertraut gemacht haben.

^azu finden unter: <https://teaching.astro.uni-koeln.de/AP>

2 Vorbereitung: Antestat des theoretischen Hintergrundwissens

2.1 Moden einer schwingenden Saite

Wie sehen die unterschiedlichen Moden einer schwingenden Saite aus?

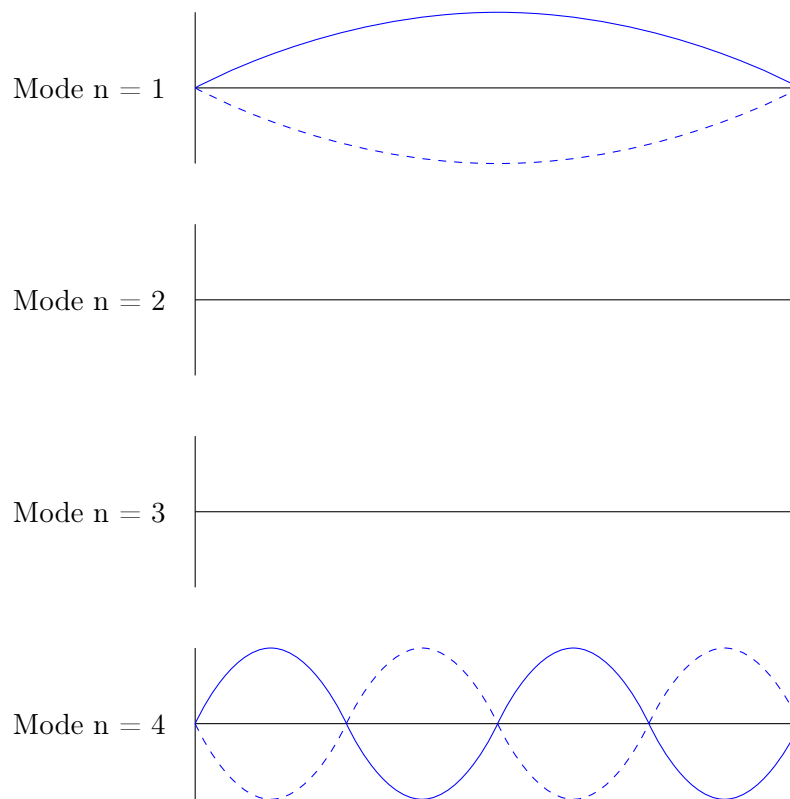


Abbildung 1: Schwingungsmoden der Saite

2.2 Was sind longitudinale und transversale Wellen und welche Form der Welle liegt in diesem Versuch vor?

Longitudinal Wellen schwingen in der Ausbreitungsrichtung der Welle. Ein einfaches Beispiel dafür sind Schallwellen, hier schwingt das Medium z.B. Luft mit der Ausbreitungsrichtung, es erfolgt eine Komprimierung und Dekomprimierung entlang der Ausbreitungsrichtung des Schalls.

Transversal Wellen hingegen schwingen orthogonal (senkrecht) zur Bewegungsrichtung der Welle, ein Beispiel dafür sind z.B. Lichtwellen andere Beispiele sind:

- _____
- _____
- _____

Bei der schwingenden Saite handelt es sich um eine _____ Welle.

2.3 Fast Fourier Analyse

Machen Sie sich mit Fast Fourier Analyse akustischer Signale vertraut indem Sie sich eine der zahlreichen kostenlosen FFT Apps herunterladen.¹ Was erwartet man für ein Spektrum, wenn man einen Lautsprecher mit einer Sinus Frequenz von 1000Hz betreibt und dieses Signal einer FastFourierAnalyse unterzieht?

¹Alternativ kann man auch im Browser [Online FFT](#) aufrufen.

2.4 Einführung in die Wellengleichung

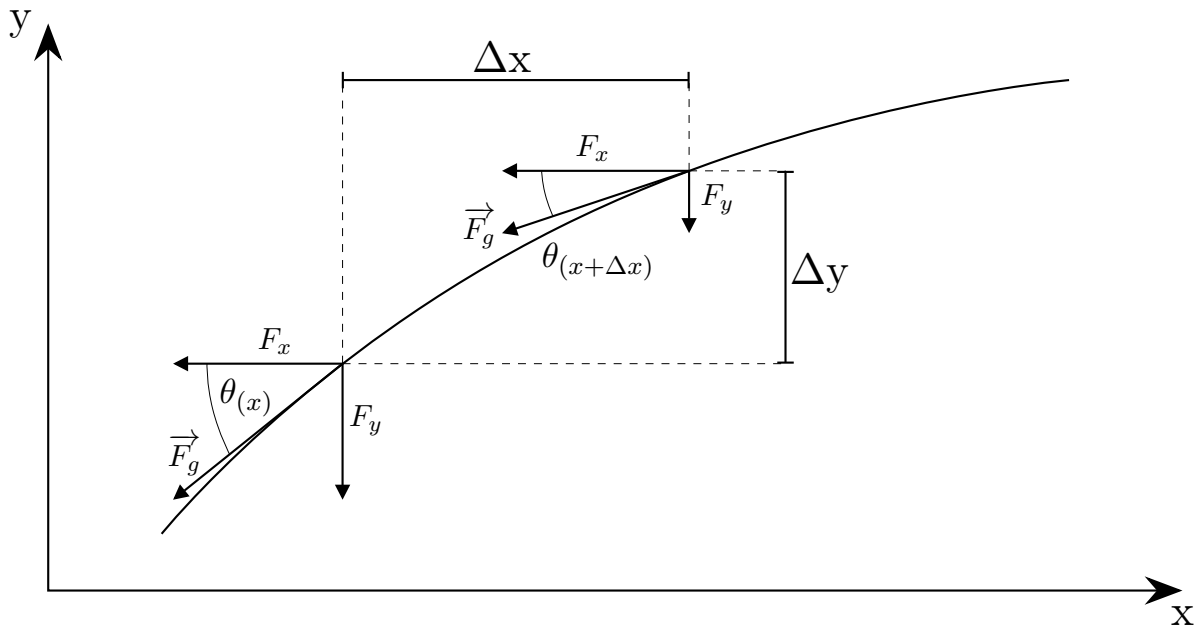


Abbildung 2.1: Kräfte diagramm der schwingenden Saite

Aus der Grafik 2.1 resultiert die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{y}(x, t) = \frac{F_x}{\rho A} y''(x, t) \quad (2.1)$$

Gleichung (2.1) ist eine Differentialgleichung die aus der Funktion $y(x, t)$ besteht. Durch Trennung der Variablen $y(x, t) = Y(x) \cdot T(t)$ und aufgrund der Tatsache, dass die beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{F_x}{\rho A} \frac{Y''(x)}{Y(x)} = -\omega^2 \quad (2.2)$$

konstant sein müssen (hier in weiser vorraussicht $-\omega^2$ genannt) erhalten wir folgende Gleichung:

$$Y''(x) + \frac{\omega^2}{\frac{F_x}{\rho A}} Y(x) = 0 \quad (2.3)$$

Diese Gleichung kann nun mit dem Ansatz für den harmonischen Oszillator gelöst werden:

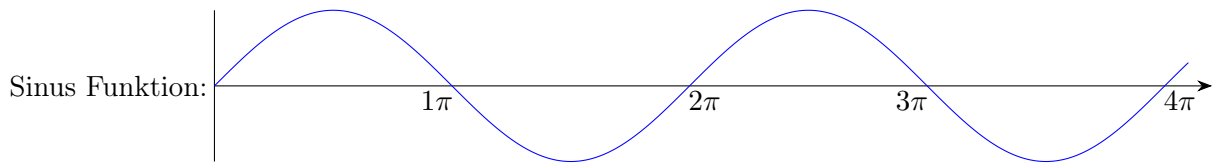
$$Y(x) = A \sin \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}} x \right) + B \cos \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}} x \right) \quad (2.4)$$

2.4.1 Anfangsbedingungen

Die Saite ist auf beiden Seiten $x = 0$ und $x = l$ eingespannt, welchen Wert nimmt also die Auslenkung an diesen Stellen an?

$$Y(0) = Y(l) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2.5)$$

Daraus folgt (weil $Y(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = B$ impliziert, dass $B = 0$ sein muss), dass $Y(l) = A \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}} l\right) = 0$ gilt. Für den nicht trivialen Fall (bei dem $A = 0$) muss man sich nun angucken was für das Argument des Sinus gelten muss damit er Null ist:



also muss das Argument $\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}} l$ ein vielfaches von π sein, es gilt:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}} l = \quad (2.6)$$

und somit:

$$\Rightarrow \omega = \quad (2.7)$$

mit $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\Rightarrow f = \frac{n\sqrt{\frac{F_x}{\rho A}}}{2\pi} = \frac{n}{2\pi} \sqrt{\frac{F_x}{\rho A}} \quad (2.8)$$

Die Saite wird in x-Richtung über eine Umlenkrolle mit einem Gewicht der Masse m gespannt. Für die Kraft mit der die Saite gespannt wird gilt also $F_x = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\Rightarrow f = \frac{n}{2\pi} \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} \quad (2.9)$$

Mit $n = 1$ erhält man die Frequenz der Grundschiwingung der Saite. Die Schwingungen mit $n = 2,3,4,\dots$ bezeichnet man als Obertöne. Die Intensitätsverhältnis der Obertöne sind für jedes Musikinstrument unterschiedliche und machen deren Klang aus.

2.5 Skizze

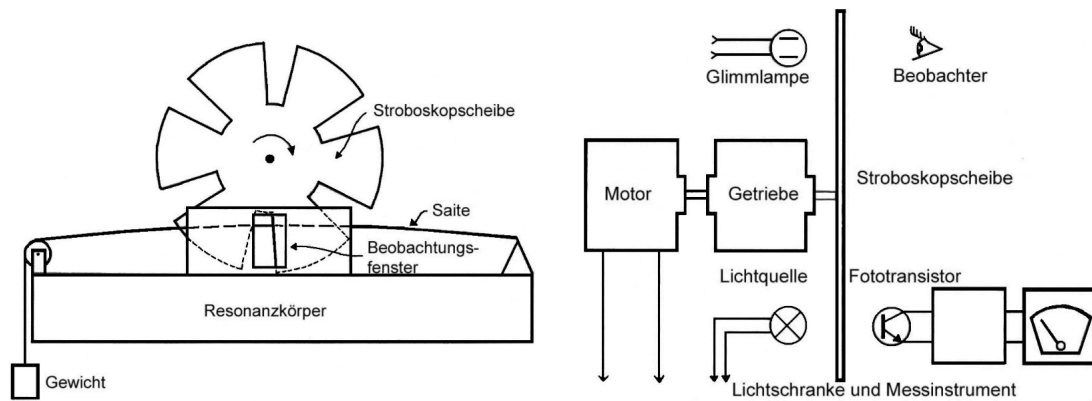
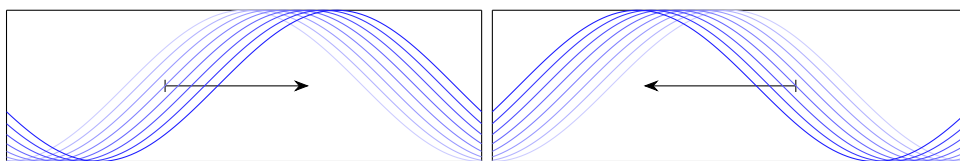


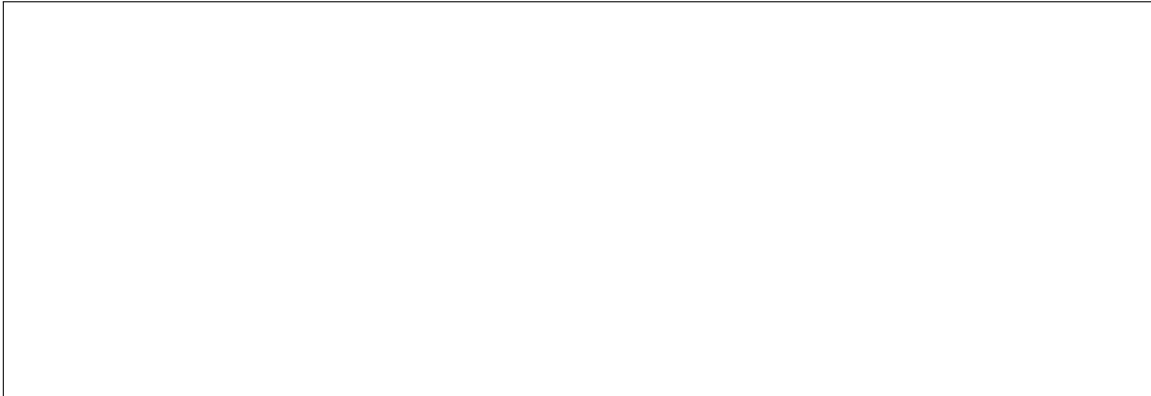
Abbildung 2.2: Skizze des Versuchaufbaus

2.6 Versuchsdurchführung

Eine Saite (Länge l , Durchmesser \varnothing bzw. Querschnittsfläche A , Dichte ρ) wird mit einem Gewicht der Masse m gespannt. Die daraus resultierende Schwingungsfrequenz der Saite wird mithilfe einer sich drehenden Stroboskopscheibe gemessen (siehe Skizze 2.2 links). Diese Scheibe besitzt in regelmässigen Abständen Spalte, so dass die Saite nur in periodischen Abständen sichtbar ist. Stimmt diese Periode (Stroboskopfrequenz) mit der Schwingungsdauer (Schwingungsfrequenz) der Saite überein, was durch Ändern der Motordrehzahl erreicht werden kann, so beobachtet man im Fenster ein stehendes Bild (ein perfekt stehendes Bild ist kaum zu erreichen, besser man sucht die Mitte, eines leicht linksgängigen und leicht rechtsgängigen Bildes).



Frage: Welche mögliche Fehlerquellen gibt es hier?



Die Stroboskopscheibe rotiert zwischen einer Lichtschranke, die aus einer Lichtquelle und einem Fototransistor mit anschließender Nachweiselektronik besteht (Skizze 2.2 rechts). Der von einem Messinstrument angezeigte Strom ist zur Stroboskopfrequenz direkt proportional. Zur Kalibrierung des Messinstrumentes beobachtet man stroboskopisch das Leuchten einer Glimmlampe, die mit Netzspannung (230 V AC, 50 Hz) betrieben wird. Die verwendete Glimmlampe besitzt 2 gleichartige Elektroden. Die Glimmentladung brennt sichtbar an der Elektrode, die gegenüber der anderen eine positive Spannung besitzt. Das Leuchten an einer Elektrode hat daher eine Frequenz von 50 Hz. Bei der stroboskopischen Beobachtung der Glimmentladung mit einer Stroboskopfrequenz von 50 Hz erhält man also ein stehendes Bild, d.h. die Glimmentladung scheint nur um eine Elektrode zu brennen. Um mehr als nur einen Frequenzwert zu erzeugen, verwendet man eine Stroboskopscheibe mit 4 Lochkränzen, mit jeweils 6, 12, 18 bzw. 24 Löchern auf dem Umfang. Die Glimmlampe steht fest auf dem Umfang mit 18 Löchern, während die Lichtschranke auf die anderen Lochkränze verschoben wird. Dadurch kann man den Strom verschiedener Frequenzen beobachten.

2.7 Ziel des Versuchs

Ist die Bestimmung der Dichte des Saitenmaterials ρ .

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} \quad (2.10)$$

Stellen Sie die Gleichung entsprechend um und beachten Sie, dass im Fall der Stroboskopmessung nur die Grundschiwingung $n = 1$ betrachtet wird:

$$\rho = \frac{mg}{\quad} \quad (2.11)$$

mit der Querschnittsfläche $A = \pi \frac{d^2}{4}$ vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\rho = \frac{mg}{d^2 \pi} \quad (2.12)$$

3 Durchführung

3.1 Dimensionen der Saite

Messen Sie den Durchmesser der Saite dreimal mit der Mikrometerschraube:
(Bitte machen Sie sich vor dem Versuch mit dem Ablesen einer Mikrometerschraube vertraut.)

<https://www.mw-import.de/werkzeug/messschraube.html>

Durchmesser der Saite/mm:

--	--	--

Messen Sie die Länge der Saite dreimal mit einem Bandmaß:

Länge der Saite/cm:

--	--	--

3.2 Kalibrierung der Stroboskop Messung

Wie in Abschnitt (2.6) beschrieben, wird die Stroboskopfrequenz nicht direkt angezeigt, sondern nur ein dazu proportionaler Strom ($f \propto I$). Die Steigung und der Offset dieses linearen Zusammenhangs muss also mit einer Kalibrierungsmessung erst ermittelt werden. Dazu wird eine Stroboskopscheibe mit 4 Lochkränzen (6, 12, 18 bzw. 24 Löcher) auf die Motorachse geschraubt. Die Glimmlampe steht fest auf dem Umfang mit 18 Löchern, während die Photozelle auf die anderen Umfänge verschoben werden kann. Notieren Sie die zu den 4 Frequenzen gehörigen Stromwerte. Beachten Sie bitte dabei, dass auch mit einer zu klein eingestellten Lochfrequenz ein stehendes Bild der Glimmlampe eingestellt werden kann, siehe unteres Bild. Beachten Sie beim Einstellen der Werte ausserdem, wie genau die Frequenzen eingestellt werden können. Tragen Sie die Messwerte in Tabelle 3.1 ein. Notieren Sie

außerdem die Ablesegenauigkeit der Strommessung: $\Delta I =$ _____

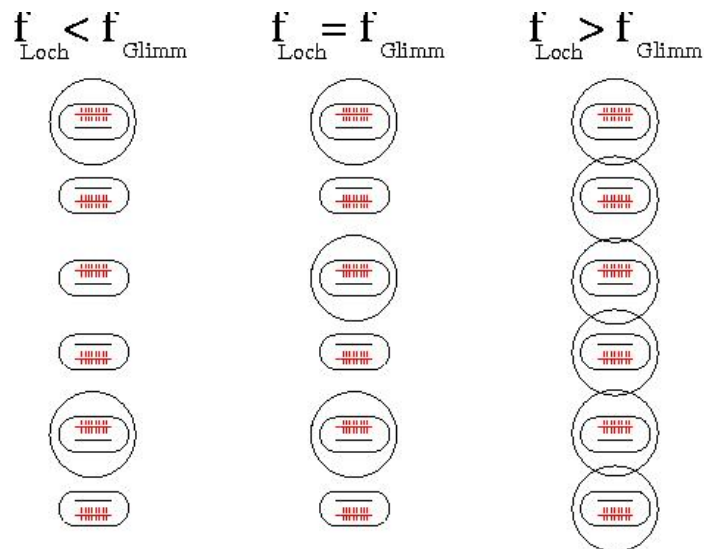


Abbildung 3.1: Einstellung der Stroboskopfrequenz

Die linke Spalte zeigt den Fall, dass die Frequenz des Lochs halb so groß ist wie die Glühlampenfrequenz, hier erscheint die Glühlampe ebenfalls zu stehen. Die rechte Spalte zeigt den Fall, dass die Frequenz des Lochs doppelt so groß ist, hier sieht man deutlich, wie das Glimmen wandert. In der Mitte ist der gesuchte Fall dargestellt. Um dies zu vermeiden nähert man sich der richtigen Frequenz am Besten von oben.

Loch-Zahl	Frequenz /Hz	Strom
6	16,67	
12		
18	50	
24		

Tabelle 3.1: Frequenz Eichung auf 50 Hz Glühlampe

3.3 Stroboskop Messung mit verschiedenen Gewichten

Messen Sie die Frequenz der schwingenden Saite für 5 verschiedene Gewichte. Benutzen sie dazu die Stroboskopscheibe mit den 6 großen Spalten. Beachten Sie dabei dass eine Messung unterhalb von 1 kg hilfreich ist, um die Wurzelabhängigkeit $f \propto \sqrt{m}$ besser zu erkennen. Das größte Gewicht sollte zwischen 7 und 10 kg liegen und ist auch in der folgenden aktustischen Messung zu verwenden. Tragen Sie die Messwerte in Tabelle 3.2 ein. Der Messfehler auf der Strommessung ist der gleiche wie bei der Kalibrierung.

n	Gewicht /kg	Strom
1		
2		
3		
4		
5		

Tabelle 3.2: Stroboskop Messung mit verschiedenen Gewichten

3.4 FFT Messung

Die Frequenz der Saite kann über ein Mikrofon gemessen werden, das an den Resonanzkörper des Aufbaus gehalten wird. Das Mikrofon ist an einen Computer angeschlossen, auf dem ein FastFourierAnalyse-Programm läuft. Mit diesem Programm kann das Frequenzspektrum der schwingenden Saite samt der Obertöne aufgenommen werden. Notieren Sie alle erkennbaren Frequenzen. Welche Frequenz ist der Grundton und wo sind die Obertöne? Notieren

sie außerdem den Ablesefehler für die Peakmaximas: $\Delta f =$ _____

Tragen Sie die Messwerte in Tabelle 3.3 ein.

Der Grundton hat die Frequenz $1f_0$, die Obertöne entsprechend $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$... das heißt, die Abstände der zum Ton gehörenden Peaks sind auf linearer Skala equidistant mit einem Frequenzunterschied der dem Grundton entspricht. Man kann die Peaks somit klar von Hintergrundrauschen unterscheiden.

n	Frequenz /Hz
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabelle 3.3: FFT Messung mit dem größten Gewicht der Stroboskop Messung

AT: _____
 (Datum) (Unterschrift Versuchsassistentz)

4 Auswertung

4.1 Eichung

Tragen Sie zunächst den Strom gegen die Frequenz auf um den erzeugten Strom des Phototransistors zu den Frequenzen zu kalibrieren. Mit Hilfe dieser Kalibrierung können danach die Strommessungen der „stehenden“ Bilder zu Frequenzen umgerechnet und mit deren Hilfe die Dichte der Saite bestimmt werden. Ergänzen Sie die Einheiten passend zur vorgegebenen Skalierung der Achsen im f - I Diagramm, außerdem müssen Sie auch die Beschriftung vervollständigen. Die Parameter der grafischen Geradenanpassung für $f(I) = a \cdot I + b$ sind in Tabelle 4.1 anzugeben.

a_{min}		b_{min}	
a_{max}		b_{max}	
\bar{a}		\bar{b}	
$\Delta\bar{a}$		$\Delta\bar{b}$	

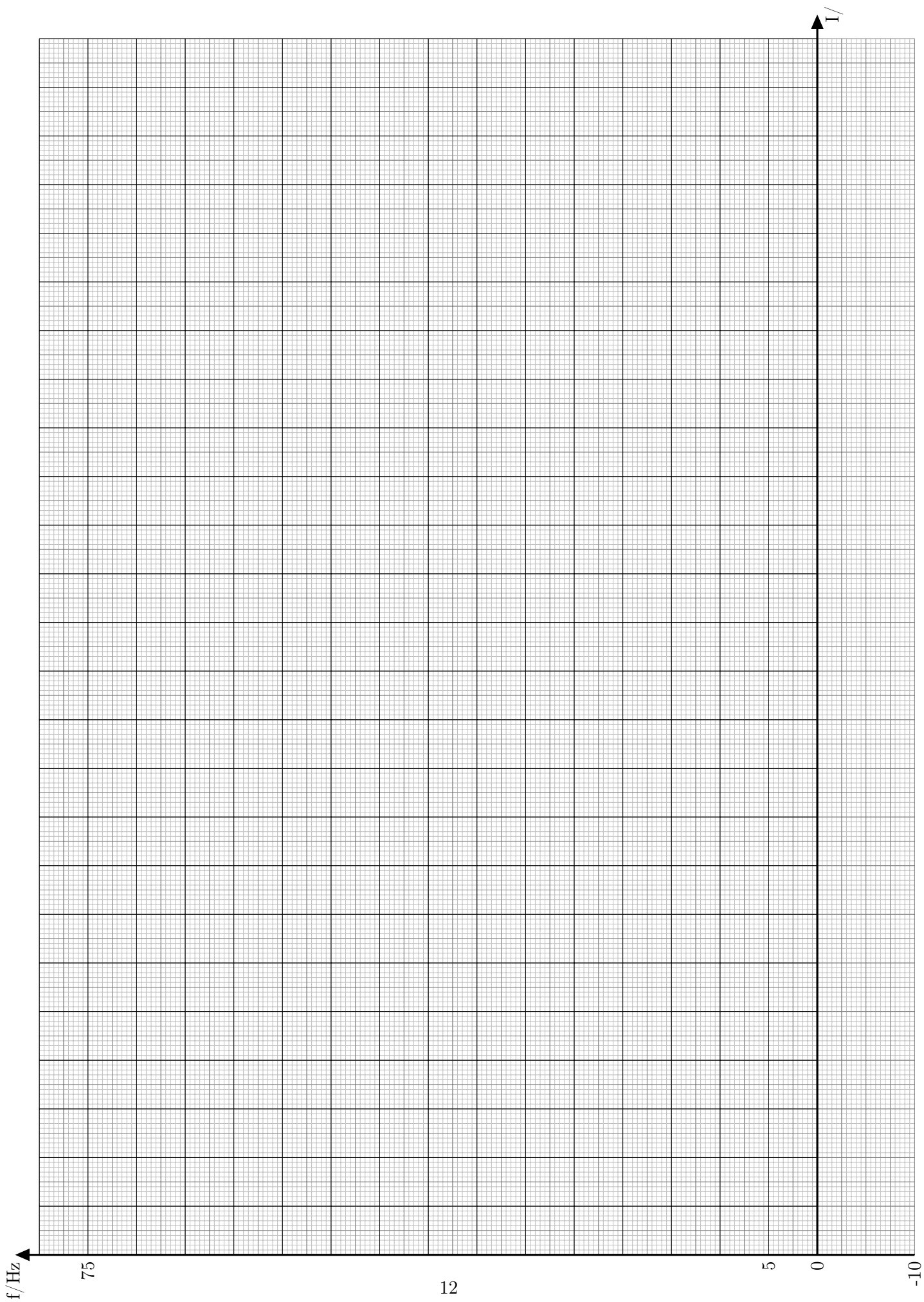
Tabelle 4.1: Ergebnisse der graphischen Geradenanpassungen des f - I -Diagramms

Das Ergebnis der Eichgeraden ist also die lineare Funktion

$$f(I) = (\quad \pm \quad) \frac{\text{Hz}}{\quad} \cdot I + (\quad \pm \quad) \text{Hz}$$

Diese ist im folgenden zu verwenden um die unbekanntenen Frequenzen der Saitenschwingung anhand der gemessenen Stromstärke zu ermitteln.

f gegen I



4.2 Frequenzbestimmung

Rechnen Sie mit Hilfe der Eichgeraden die gemessenen Stromwerte in Frequenzen um und tragen Sie die Frequenz gegen die angehängte Masse auf. Was für ein Verlauf ist zu erwarten bzw. welcher Formel folgt dieser?

Tragen Sie ausserdem den Logarithmus der Frequenz gegen den Logarithmus der angehängten Masse auf. Erklären Sie, warum hier ein linearer Verlauf zu erwarten ist und welche Steigung zu erwarten ist.¹

Überprüfen Sie ihre Aussage, indem Sie eine Geradenanpassung an Ihren Graphen machen.

n	Gewicht /kg	Frequenz /Hz	Fehler der Frequenz /Hz
1			
2			
3			
4			
5			

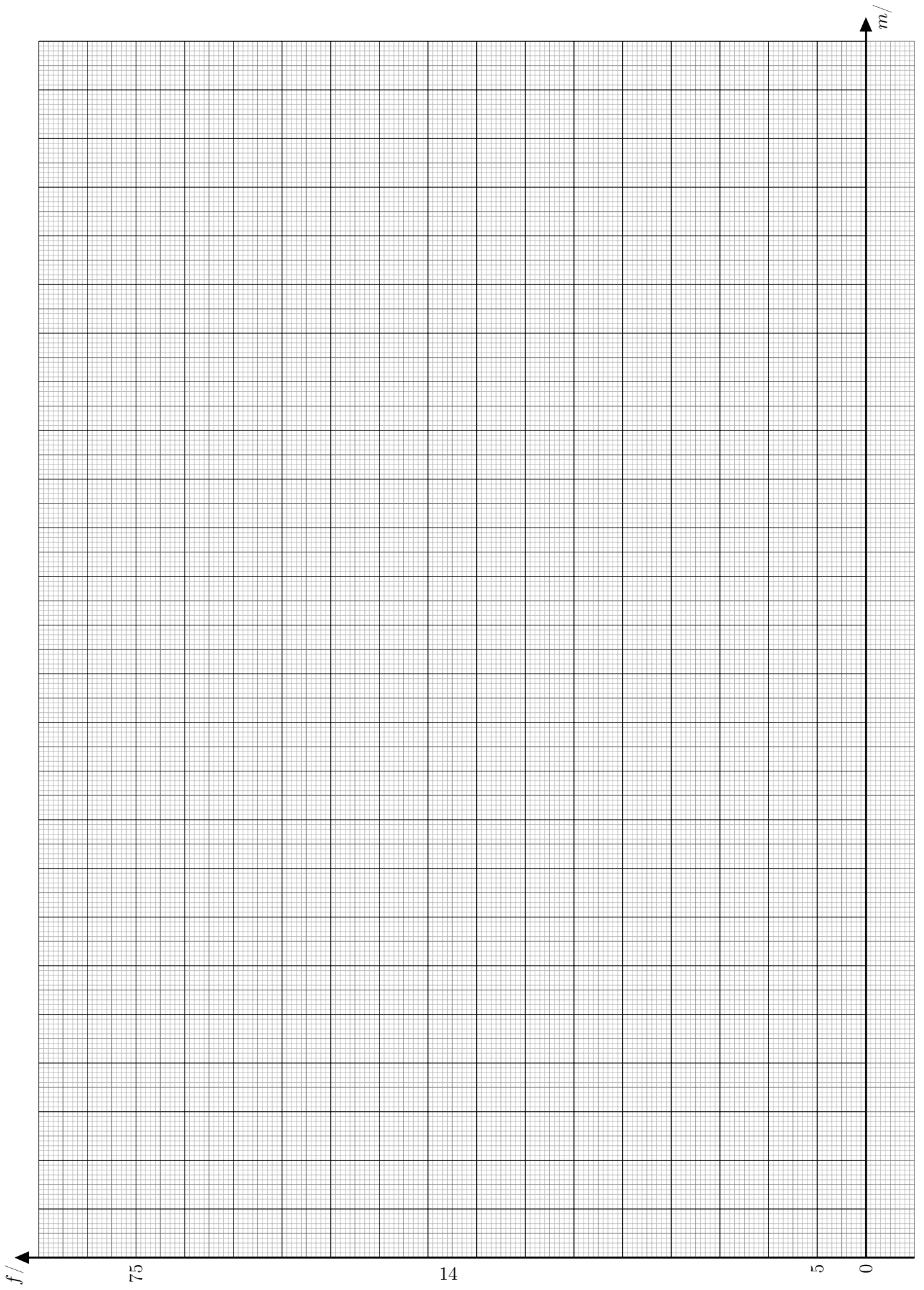
Tabelle 4.2: Frequenzbestimmung der Stroboskopmessung

n	$\log(m/kg)$	$\log(f/Hz)$	$\Delta \log(f/Hz)$
1			
2			
3			
4			
5			

Tabelle 4.3: Werte der doppeltlogarithmischen Auftragung

¹Tipp: $\log(f) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{mg}{\rho d^2 \pi}\right)$

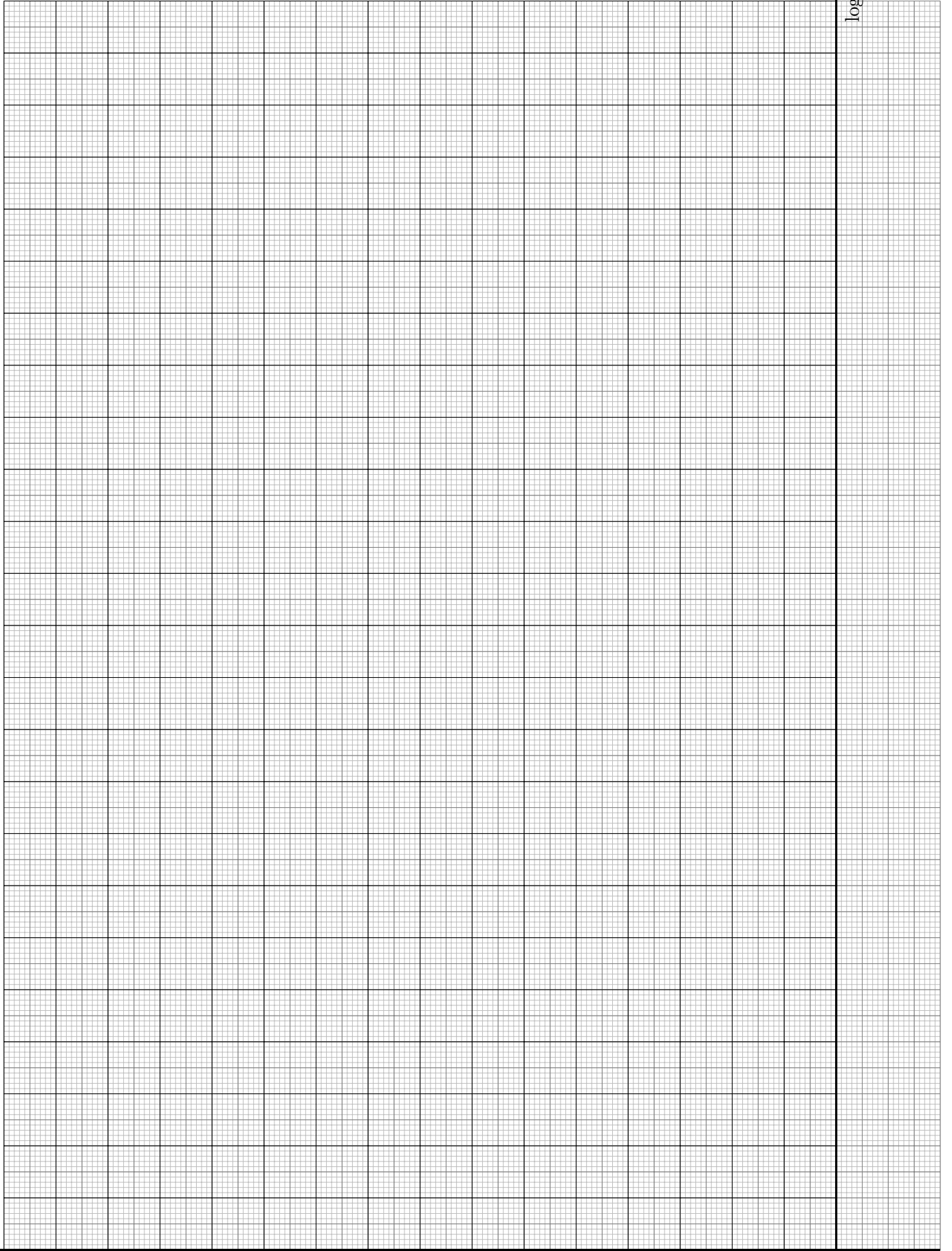
f gegen m



$\log(f/)$ gegen $\log(m/)$

$\log(f/)$

$\log(m/)$



Geben Sie die Fehlerformel für den Fehler von $\Delta \log(f)$ an.

4.3 Geraden Anpassung für die doppeltlogarithmische Auftragung

a_{min}	
a_{max}	
\bar{a}	
$\Delta \bar{a}$	

Tabelle 4.4: Ergebnisse der graphischen Geradenanpassungen des doppelt logarithmischen Diagramms

Stimmt das Ergebnis mit Ihren Erwartungen überein?

4.4 Bestimmung der Dichte des Saitenmaterials

Zur Bestimmung der Dichte des Saitenmaterials benötigen wir folgende Zusammenhänge:

$$\rho = \frac{1}{4f^2l^2} \frac{mg}{A} \quad (4.1)$$

$$\rho = \frac{1}{4f^2l^2} \frac{mg}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (4.2)$$

$$\rho = \frac{4}{4f^2l^2} \frac{mg}{\pi d^2} = \frac{1}{f^2l^2} \frac{mg}{\pi d^2} \quad (4.3)$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial f}\Delta f\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\Delta d\right)^2} \quad (4.4)$$

die Masse m und die Erdbeschleunigung g dürfen für diesen Versuch als fehlerlos angesehen werden.

$$\frac{\partial\rho}{\partial f} =$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial l} =$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial d} =$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\quad}{\quad}\Delta f\right)^2 + \left(\frac{\quad}{\quad}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\quad}{\quad}\Delta d\right)^2}$$

n	Gewicht /kg	Dichte / $\frac{kg}{m^3}$	Fehler der Dichte / $\frac{kg}{m^3}$
1			
2			
3			
4			
5			

Tabelle 4.5: Dichtebestimmung mit der Stroboskop Messung

Bestimmen Sie nun den gewichteten Mittelwert:

$$\bar{\rho}_{\text{Stroboskop}} = \frac{\quad}{\quad} \pm \frac{\quad}{\quad} \frac{kg}{m^3} (\pm \quad \%) \quad (4.5)$$

Außerdem wurde die Frequenz mit dem größten Gewicht über die Akustik Messung bestimmt und ein Ablesefehler notiert. Berechnen Sie hierfür zunächst die Fehlerformel für ρ :



Tragen Sie nun die Ergebnisse für die Dichte ρ_{FFT} in Tabelle 4.6 ein.

n	Frequenz /Hz	Dichte / $\frac{kg}{m^3}$	Fehler der Dichte / $\frac{kg}{m^3}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Tabelle 4.6: Dichtebestimmung mit der FFT Messung

Bestimmen Sie auch hier den Mittelwert:

$$\bar{\rho}_{\text{FFT}} = \text{_____} \pm \text{_____} \frac{kg}{m^3} (\pm \text{_____} \%) \quad (4.6)$$

5 Diskussion

Diskutieren Sie, stimmen die Ergebnisse aus beiden Messungen überein? Aus welchem Material bestand die Saite, was ist der Literaturwert für die Dichte des Materials und wie passt das mit den Messungen zusammen?

6 Literatur

- Fehlerrechnung:
http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002 (Kapitel 4)
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994 (Kapitel 13)
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001 (Kapitel 11)
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Berkeley Physics Course, Vol.3: Waves
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner