I. Physikalisches Institut
Universität zu Köln

M7 Rotations- und Translationsbewegung

Praktikum A für Nebenfächler

Version vom 25. April 2021

Abzugeben bis: _____

Assistent: _____

Gruppenmitglieder: _____

_____

_____

Wichtige Informationen

Zur Bearbeitung ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich mit den Grundlagen der Fehlerrechnung (u. a. Gaußsche Fehlerfortpflanzung, (gewichteter) Fehler des Mittelwerts, grafische Geradenanpassung) vertraut machen. Informationen dazu finden Sie beispielsweise im Dokument „allgemeine Hilfen für das Praktikum A“ auf der Webseite des A-Praktikums[a].
Aufgrund des Umfangs dieses Versuchs ist es nötig die Blätter mittels Schnellhefter o. ä. zu binden. Bitte lochen Sie die Blätter und heften Sie diese sorgfältig ein. Sollte die Form der Abgabe nicht den Regularien entsprechen, kann die*der Assistent*in die Annahme der Auswertung verweigern.
Versuchen Sie innerhalb der vorgegebenen Lücken zu bleiben. Diese geben ungefähr den an entsprechender Stelle erwarteten Umfang vor. Sollte der Platz dennoch nicht ausreichen, fügen Sie ganze Blätter ein, auf welchen deutlich markiert ist, was wozu gehört.
Beachten Sie bitte, dass alle entsprechenden Lücken und Fragestellungen ausgefüllt und beantwortet werden müssen. Insbesondere sind Lücken bis hin zum Messprotokoll bereits vor dem Versuchstag zu bearbeiten. Dies müssen Sie vor Ort nachweisen und wichtige Inhalte frei wiedergeben können. Es wird davon ausgegangen, dass alle Gruppenmitglieder die vollständige Anleitung durchgelesen und verstanden haben. Sollten Sie am Versuchstag nicht ausreichend auf den Versuch vorbereitet sein, wird die*der Assistent*in Sie nicht am Versuch teilnehmen lassen.
Die Abgabe muss alle Seiten umfassen, insbesondere aber Seiten mit auszufüllenden Lücken. Dazu gehören in jedem Fall die Titelseite, die Vorbereitung, das Messprotokoll und die Auswertung mit Diskussion.

Alle auf dem Deckblatt aufgeführten Gruppenmitglieder sind für die Bearbeitung und fristgerechte Abgabe des Versuchsberichts bzw. dessen erforderlichen Korrekturen zuständig und verantwortlich. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass Sie sich mit den Regeln des A-Praktikums[a] vertraut gemacht haben.

[a] zu finden unter: https://www.astro.uni-koeln.de/AP/

Es ist nicht notwendig den Anhang mit auszudrucken. Allerdings kann dieser gerade bei Detailfragen enorm weiterhelfen und soll durchgelesen und verstanden sein.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Vorbereitung (zu Hause) 2

3 Versuchsaufbau und -beschreibung 7

4 Benötigte Formeln 8
- 4.1 Beschleunigung des Fallrads . . . 8
- 4.2 Trägheitsmomente . . . 8
- 4.3 Wirksamer Radius . . . 8
- 4.4 Umkehrpunkt . . . 9

5 Durchführung (im Praktikum) 10

6 Aufgabenstellung 12

7 Auswertung (zu Hause) 14
- 7.1 Bestimmen Sie die Beschleunigung des Fallrads, sowie das Verhältnis f/g. . . . 14
- 7.2 Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_S des Fallrads. . . . 17
- 7.3 Berechnen Sie die Massen des Fallrads m_{ges} und des Rings m_R. . . . 20
- 7.4 Bestimmen Sie für jede Fallhöhe h die mittlere Kraft K im Umkehrpunkt. . . . 21
- 7.5 Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. . . . 21

8 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln 23
- 8.1 Bewegung des Fallrads . . . 23
  - 8.1.1 Drehmomentansatz . . . 24
  - 8.1.2 Energieansatz . . . 24
- 8.2 Wirksamer Radius . . . 25
- 8.3 Kräfte . . . 25
  - 8.3.1 Zugkraft an der Aufhängvorrichtung . . . 25
  - 8.3.2 Mittlere Kraft im Umkehrpunkt . . . 25

9 Literatur 27

1 Einleitung

In diesem Versuch sollen Sie sich mit den Grundlagen von Rotations- und Translationsbewegungen vertraut machen. Diese spielen praktisch in allen Naturwissenschaften eine Grundlegende Rolle. Zum Beispiel lassen sich basierend auf den in diesem Versuch vermittelten Grundlagen auf beliebige Chemische, Biologische oder Geowissenschaftliche Systeme übertagen. Denn Sie behandeln in diesem Versuch ein System, welches das Prinzip der Energieerhaltung erfüllt. Durch die exakte Untersuchung der Parameter können Aussagen über das System zu beliebigen Zeitpunkten t gemacht werden.

Am Beispiel des Maxwell'schen Fallrads untersuchen Sie eine Bewegung, die sowohl Rotations- als auch Translationsanteile enthält. Dabei setzen Sie sich auch mit Trägheitsmomenten bezüglich verschiedener Rotationsachsen auseinander.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in dieser Anleitung schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 8. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 9.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:

   - Allgemeine Begriffe:

     Was ist die Erdbeschleunigung und wie hoch ist ihr ungefährer Wert in $\mathrm{m/s^2}$?

     Wie lautet die Definition des Freien Falls? Geben Sie außerdem die Formel für die Höhe in Abhängigkeit der Zeit $h(t)$ an.

     Wie lauten die Erhaltungssätze der Mechanik?

Bitte geben Sie die allgemeine Form der Gaußschen Fehlerfortpflanzung an:

Wie lautet die finale Fehlerfortpflanzungsformel für die Funktion $f_{(x,y)} = xy$?

- Translationsbewegung:

  Wie ist der Impuls definiert?

  Wie ist die Kraft definiert?

  Wie ist die kinetische Energie definiert?

- Rotationsbewegung:

  Wie ist das Trägheitsmoment definiert:

  Wie ist der Drehimpuls definiert?

  Wie ist das Drehmoment definiert?

  Wie ist die Rotationsnergie definiert?

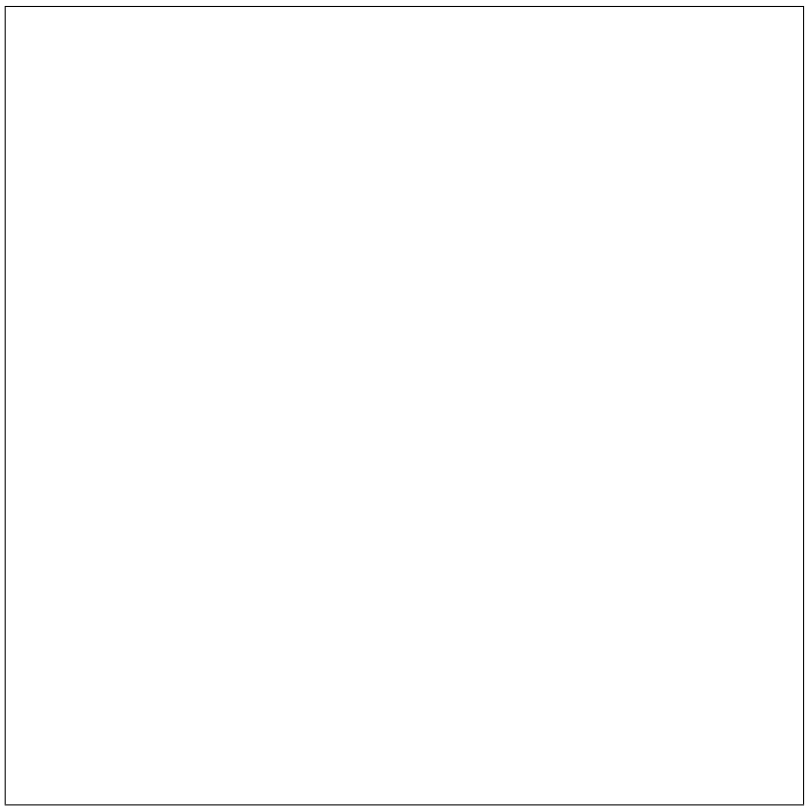
Vergleichen Sie die Formeln von Translations- und Rotationsbewegungen. Welche Analogien lassen sich zwischen den physikalischen Größen finden?

- Satz von Steiner:

  Geben Sie die Formel für den Satz von Steiner an:

  --- (2.1)

  Fertigen Sie eine passende Skizze an, in der die Größen aus Gleichung (2.1) deutlich werden:



2. Bewegung des Fallrads:

   Bewegungsgleichungen werden in den Naturwissenschaften eingesetzt, um den Zustand von Systemen zu beliebigen Zeitpunkten beschreiben zu können. Machen Sie sich mit der Herleitung der Bewegungsgleichung (8.7) vertraut und bestätigen Sie insbesondere, dass die Beschleunigung $\ddot{h}(t)$ zeitlich konstant ist:

   Zeitliche Ableitungen werden in der Physik mit einen Punkt über der Variablen gekennzeichnet. Dieser Sachverhalt soll im folgenden Beispiel verdeutlicht werden. In der Schule haben Sie meist $f(x)$ nach x abgeleitet. Mathematisch kann diese ausgedrückt werden mit $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ wobei x hier die Variable ist, nach der abgeleitet wurde. Eine zeitliche Ableitung hätte die Form $\frac{df(x)}{dt} = \dot{f}(x)$. Wenn nun $f(x) = x$ ist, würde die zeitliche Ableitung entsprechend $\dot{f}(x) = \dot{x}$ ergeben[1].
   Grundsätzlich kann für x im obigen Beispiel jede beliebige Funktion eingesetzt werden. Wir suchen nun eine aus der Schule bekannte Funktion deren Ableitung wieder „sich selbst ergibt“:

   _____.

   Wir wenden nun das gelernte an: $\frac{df(t)}{dt} = \exp(t)$ für $f(t) = \exp(t)$. Wir können nun einmalig integrieren indem wir $\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \exp(t)$ schreiben als: $\int \exp(t)dt = f(t)$. Machen Sie sich mit diesem Zusammenhang vertraut. Was wäre das Ergebnis der Integration? _____

   _____

   _____

   Sollte es Probleme geben, notieren Sie sich diese damit Verständnisfragen am Versuchstag besprochen werden können.

[1] Zur mathematischen Vollständigkeit (nicht Praktikumsrelevant): In dem Beispiel leiten wir x nach der Zeit t ab. Mathematisch korrekt wäre aber die Schreibweise $x(t)$. Das bedeutet, dass die Variable x zeitabhängig ist. Daher ist die Ableitung $\frac{dx}{dt}$ ganz allgemein auch erst einmal $\neq 0$. Für Interessierte: Was bedeutet es für x, wenn $\frac{dx}{dt} = 0$?

3. Wirksamer Radius:

   - Erläutern Sie, warum der wirksame Radius R durch (4.4) gegeben ist:

   - Zeigen Sie, dass er näherungsweise durch (4.5) berechnet werden kann:

4. Kräfte:

   - Zeigen Sie, dass die Kraft F_Z mit der das Fallrad an der Aufhängevorrichtung zieht sowohl für die Abwärts- als auch für die Aufwärtsbewegung gegeben ist durch (8.16):

   - Zeigen Sie, dass die mittlere Kraft im Umkehrpunkt K gegeben ist durch (4.6) und benutzen Sie $\dot{h}^2 = 2fh$ sowie Formel (8.18):

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

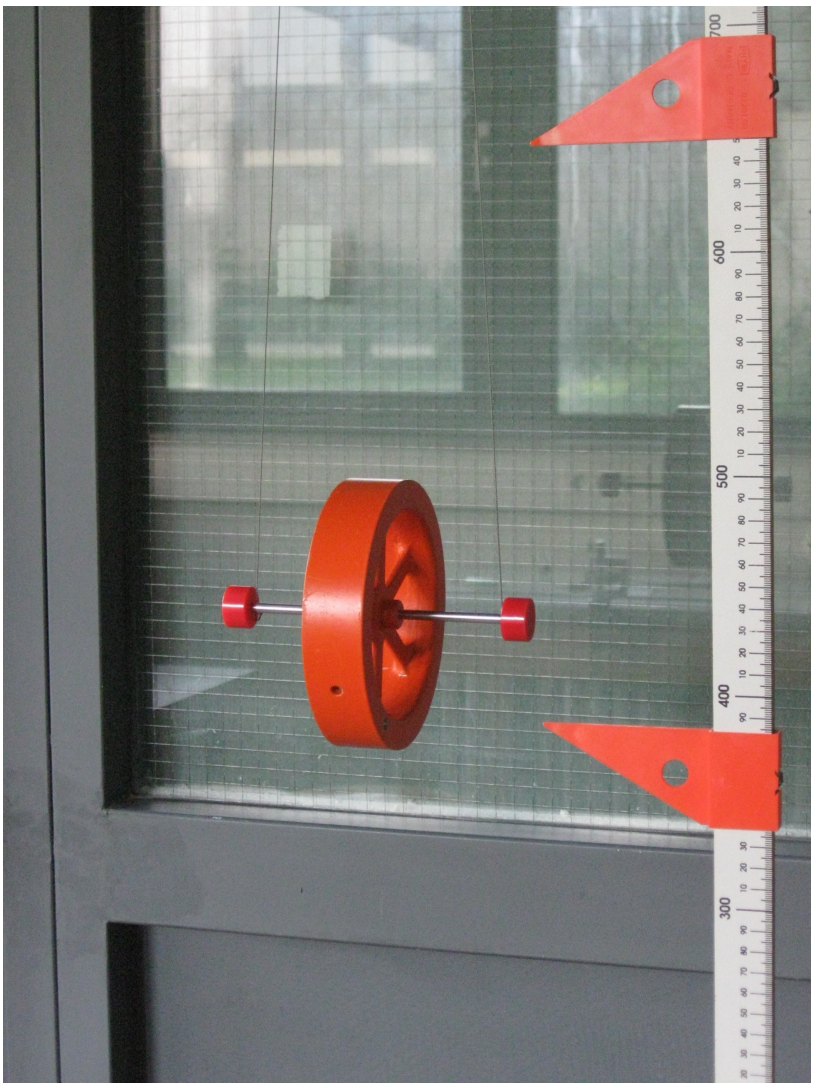


Abbildung 3.1: *Foto des Versuchsaufbaus*

Das Maxwell'sche Fallrad ist an einem Stativ neben einer Messlatte aufgehängt. Zusätzlich wird die Stoppuhrfunktion ihres Smartphones/Handys/o.ä. und eine Schieblehre benötigt. Die Messlatte dient zum Ablesen der Ausgangshöhe von der das Rad hinunterfällt und der Endhöhe, bei der es umkehrt und wieder aufwärtsläuft. Die Fallzeit wird mit der Stoppuhr bestimmt. Die Schieblehre dient zum Ausmessen des Rades zur späteren Bestimmung seines Trägheitsmoments.

4 Benötigte Formeln

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 8 dieser Anleitung.

4.1 Beschleunigung des Fallrads

Das Weg-Zeit-Gesetz für ein Fallrad, das auf einer Höhe h_0 losgelassen wird, lautet

$$h(t) = \frac{1}{2} f t^2 + h_0 \ . \tag{4.1}$$

Dabei ist f die Beschleunigung des Fallrads.

4.2 Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment I eines Hohlzylinders der Dichte ρ mit den Abmessungen: Innenradius R_1, Außenradius R_2 und Höhe H ist gegeben durch

$$I = \frac{1}{2} H \pi \rho \left(R_2^4 - R_1^4 \right) \ . \tag{4.2}$$

Um den Fehler abzuschätzen, den man durch Vernachlässigung der Speichen macht betrachtet man das Verhältnis der Trägheitsmomente von Speichen und Ring unter der Annahme, dass die Massen des Rings m_R und der Speichen m_{Sp} bei bestimmten Radien r_{Sp} und r_R konzentriert seien.

$$\frac{I_{Sp}}{I_R} = \frac{m_{Sp} r_{Sp}^2}{m_R r_R^2} \ . \tag{4.3}$$

Daher müssen Sie für das Verhältnis der Trägheitsmomente nur sinnvolle Verhältnisse der entsprechenden Massen und Radien abschätzen und diese multiplizieren. (Tipp: das Verhältnis der Massen ist gleich dem Verhältnis der Volumina, da Speichen und Ring aus demselben Material bestehen.)

4.3 Wirksamer Radius

Der wirksame Radius R des Fallrads liegt auf der Mitte des Fadens, er ist also gegeben durch den Radius der Achse R_A und den des Fadens R_F als

$$R = R_A + R_F \ . \tag{4.4}$$

Daraus kann man mithilfe von

$$R^2 \approx \frac{I_S f}{m_{ges} g} \tag{4.5}$$

die Gesamtmasse des Fallrads m_{ges} berechnen. g ist die Erdbeschleunigung.

4.4 Umkehrpunkt

Die mittlere Kraft im Umkehrpunkt ist gegeben durch

$$K = \frac{4 m_{ges} f h}{\pi R} \ . \tag{4.6}$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. Eingewöhnung
   Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten.
   Zeichnen Sie eine Versuchsskizze in Ihr Protokollheft. Überprüfen Sie dann die Position des unteren Schiebers für die Höhe des Umkehrpunktes (also die Höhe auf der das Fallrad am abgerollten Faden hängt).

2. Messung
   Geben Sie für alle gemessenen Größen die zugehörigen Fehler an.

   a) Bestimmen Sie die Fallzeit t als Funktion der Fallhöhe h.
   Stoppen Sie dazu für fünf verschiedene Fallhöhen h die zugehörige Fallzeit t jeweils fünf mal.

   b) Bestimmen Sie die Maße des Fallrades, die Sie zur Berechnung seines Trägheitsmoments I_S benötigen.
   Messen Sie dazu die Breite B, die Höhe H und den Außendurchmesser D_R des Ringes je fünf mal an *verschiedenen* Stellen. Fertigen Sie in ihrem Protokollheft eine Skizze an, die die Bezeichnungen verdeutlicht.

   c) Bestimmen Sie die Maße, die Sie zur Berechnung des wirksamen Radius R benötigen.
   Hierfür müssen Sie den Durchmesser der Achse D_A und den des Fadens D_F ermitteln. Um den Fadendurchmesser zu bestimmen, wickeln Sie den Faden einige Male dicht nebeneinander um die Achse und messen den Durchmesser $F = D_A + 2 \cdot D_F$.
   Führen Sie diese beiden Messungen wieder jeweils fünf mal aus.

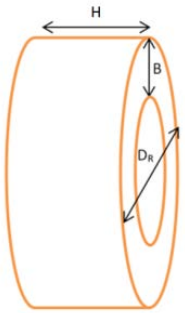
a) Fallzeit t als Funktion der Fallhöhe h

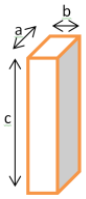
Δh /cm	

Fallstrecke h /cm						
Zeit /s	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

b) Maße des Fallrades zur Berechnung des Trägheitsmoments I_s

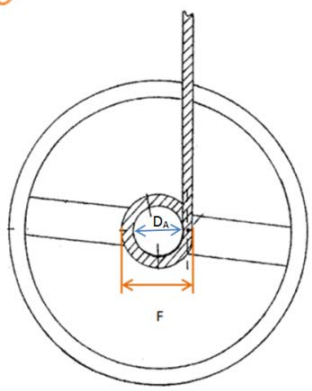
	Hohlzylinder (in cm)			Speichen (in cm)			
	Außendurch-messer D_R	Höhe H	Breite B	a	b	c	Anzahl
1							
2							
3							
4							
5							





c) Maße zur Berechnung des wirksamen Radius R

	Durchmesser der Achse D_A	Durchmesser von Achse & Faden $F=D_A+2\cdot D_F$
1		
2		
3		
4		
5		



AT: _____ _____

(Datum) (Unterschrift Versuchsassistenz)

6 Aufgabenstellung

Die Folgenden Punkte sind in der Auswertung (Kapitel 7) detailiert zu bearbeiten.
Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung* auf der Praktikumshomepage[1]. Allgemeine Hilfen zur z.B. Fehlerrechnung für das Praktikum sind ebenfalls auf der genannten Homepage zu finden[2].

1. Bestimmen Sie die Beschleunigung f des Fallrads, sowie das Verhältnis $\frac{f}{g}$
Tragen Sie zunächst die gemessenen Fallhöhen h gegen die zugehörigen Fallzeiten t auf und skizzieren Sie den erwarteten Verlauf in diesem Diagramm. Danach tragen Sie h gegen t^2 auf und führen eine graphische Geradenanpassung durch. Aus der Steigung können Sie den Wert der Beschleunigung f und deren Verhältnis zur Erdbeschleunigung $\frac{f}{g}$ berechnen (vgl. (4.1)).

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_S des Fallrads
Der Ring des Fallrads ist ein Hohlzylinder, dessen Trägheitsmoment sich nach Formel (4.2) berechnet. Das hier verwendete Fallrad besteht aus Aluminium. Um das Trägheitsmoment zu berechnen, schlagen Sie bitte dessen Dichte nach und geben die Quelle an.
Speichen und Achse des Fallrads werden hier vernachlässigt. Schätzen Sie den Fehler ab, den man dadurch macht, indem Sie das Verhältnis der Trägheitsmomente von Speichen und Ring (4.3) abschätzen.
Vergleichen Sie nun den geschätzten Fehler durch die Vernachlässigung der Speichen mit dem Fehler, der sich nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung aus Ihren Messungenauigkeiten für das Trägheitsmoment ergibt. Hierzu eignen sich am besten die relativen Fehler.

3. Berechnen Sie die Massen des Fallrads m_{ges} und des Rings m_R
Ermitteln Sie dazu zunächst den wirksamen Radius gemäß (4.4) und berechnen Sie daraus die Gesamtmasse mithilfe von (4.5). Berechnen Sie dann die Masse des Rings mithilfe seines Volumens und der Dichte. Wieviel Prozent der Gesamtmasse sind im Ring konzentriert? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem geschätzten Verhältnis der Trägheitsmomente.

4. Bestimmen Sie für jede Fallhöhe h die mittlere Kraft K im Umkehrpunkt
Berechnen Sie die Kräfte nach (4.6) und geben Sie die Werte in Newton und dyn an.

5. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.
Entsprechen die Verläufe der Diagramme Ihren Erwartungen? Erscheint Ihnen die Näherung

[1] https://teaching.astro.uni-koeln.de/AP
[2] https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/allgemeine_Hilfen_Praktikum_A.pdf

für die Trägheitsmomente sinnvoll? Dürfte man diese Näherung auch für die Massen machen? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

7 Auswertung (zu Hause)

Die Lücken sind unter Berücksichtigung der übergeordneten Aufgabenstellungen (Kapitel 6) zu füllen.
Bitte zeichnen Sie die Graphen auf das hier enthaltene Millimeterpapier. Verwenden Sie, falls nötig, ein Lineal. Achten Sie auch die Achsenbeschriftungen und versuchen Sie, sauber zu arbeiten.

7.1 Bestimmen Sie die Beschleunigung des Fallrads, sowie das Verhältnis f/g.

Bitte geben Sie zu jedem Wert einen Fehler an. Zeichnen Sie diese Wertepaare in das mm-Papier (Abb. 7.1 und 7.2).

Tabelle 7.1: *Beschleunigungszeiten des Fallrads*

#	h (cm)	Δh (cm)	$\bar{t}$ (s)	$\Delta\bar{t}$ (s)	$\bar{t}^2$ (s^2)	$\Delta\bar{t}^2$ (s^2)
1						
2						
3						
4						
5						

Fehlerrechnung von Δt^2:

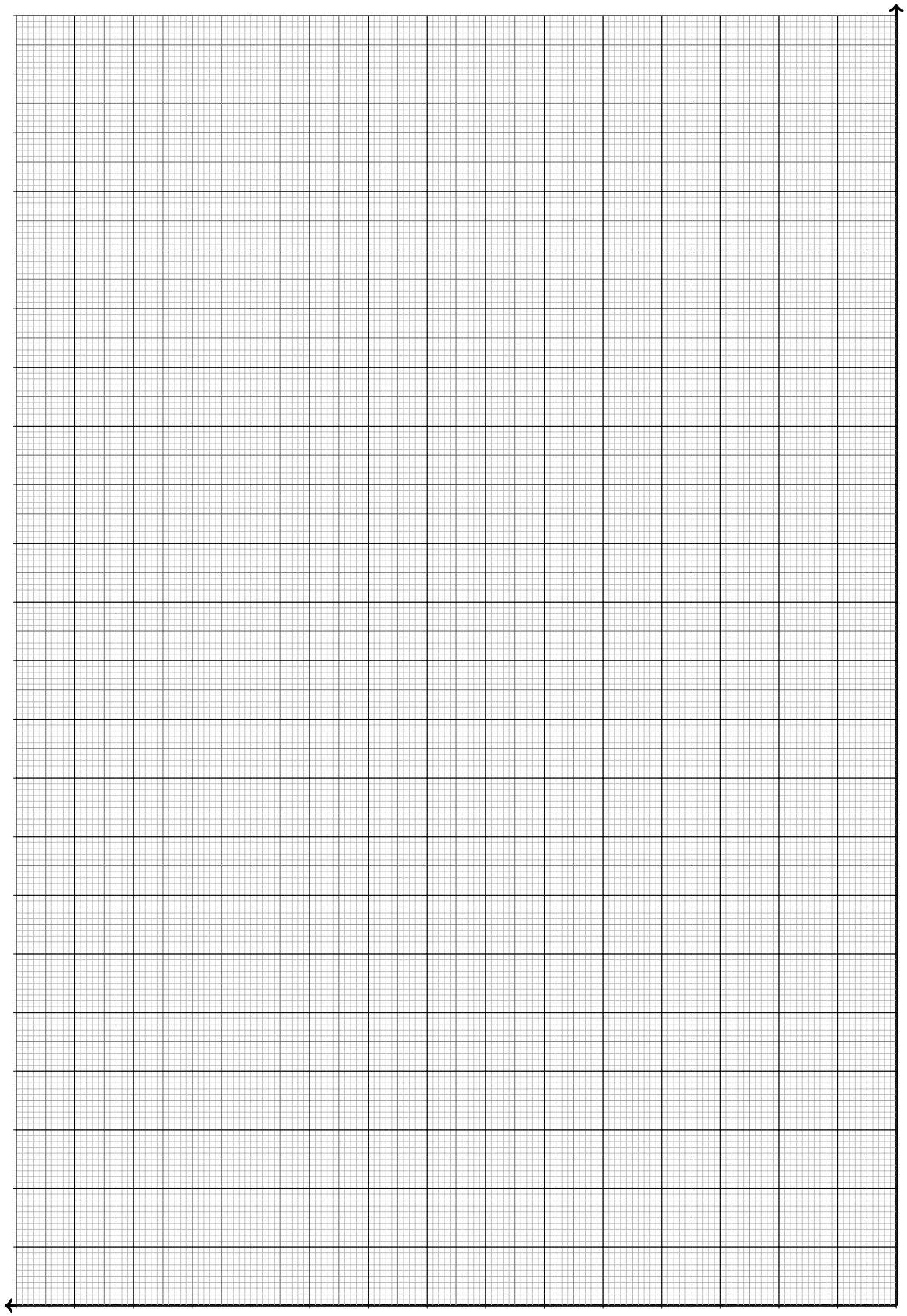


Abbildung 7.1: *Fallhöhe gegen Fallzeit*

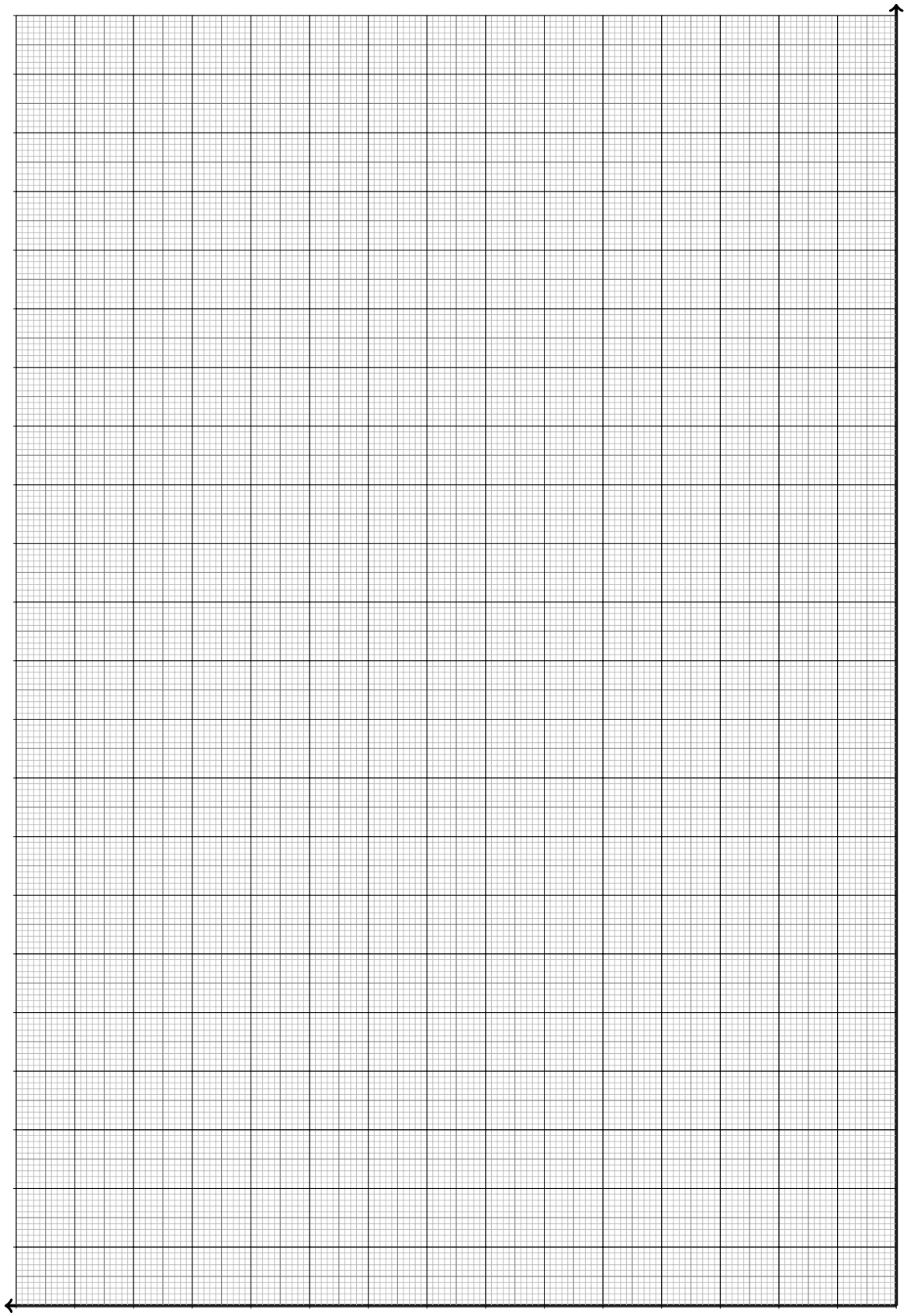


Abbildung 7.2: *Fallhöhe gegen Fallzeit*^{2}

Berechnen Sie nun mit der Steigung a aus Abb. 7.2 die Beschleunigung der Fallzeit des Fallrads. Beachten Sie, das die Fallhöhe mit $h(t) = \frac{1}{2}ft^2$ brechnet wird und somit die Steigung $a = \frac{1}{2}f$ ist:

Die minimale Steigung ist $a_{min} =$ _____ .

Die maximale Steigung ist $a_{max} =$ _____ .

Die gemittelte Steigung ist $\bar{a} =$ _____ .

Der Fehler des Mittelwerts dieser Steigung ist $\Delta\bar{a} =$ _____ .

Somit ist also $f =$ _____ $\pm$ _____ ($\pm$ _____%).

7.2 Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_S des Fallrads.

Tabelle 7.2: *Maße des Hohlzylinders. D_R = Außendurchmesser; H = Höhe; B = Breite; R_a = Außenradius; R_i = Innenradius;*

	Wert	Fehler
D_R		
H		
B		
$R_a = \frac{D_R}{2}$		
$R_i = R_a - B$		

Fehlerrechnung zu R_a und R_i:

Berechnen Sie nun das Trägheitsmoment und geben Sie die Fehlerabschätzung mit an. Relevante Formeln und Literaturwerte sollten Sie ebenfalls notieren:

Schätzen Sie nun den Fehler durch die Vernachlässigung der Speichen ab.

Tabelle 7.3: *Werte zur Abschätzung des Fehlers durch Vernachlässigung der Speichen*

	Volumen	mittl. Radius
Ring		
Speichen		

Das Verhältnis $\frac{I_{Sp}}{I_R}$ der Trägheitsmomente von Speichen zu Ring ergibt sich nun nach Gleichung 4.3 zu:

Tabelle 7.4: *Massenverhältnis und Trägheitsmomentverhältnis inkl. Fehler*

Massenverhältnis m_{sp}/m_{ges}	Trägheitsmomentverhältnis I_{sp}/I_{ges}
Kehrwerte: (inkl. Angabe in Prozent)	
Massenverhältnis m_{ges}/m_{sp}	Trägheitsmomentverhältnis I_{ges}/I_{sp}

Erscheint Ihnen die Näherung für die Trägheitsmomente sinnvoll? Dürfte man diese Näherung auch für die Massen machen?

7.3 Berechnen Sie die Massen des Fallrads m_{ges} und des Rings m_R.

An der Achse wurden die folgenden gemittelten Werte gemessen:

Tabelle 7.5: *Maße der Achse. D_A: Achsendurchmesser, $F = 2D_F + D_A$: Durchmesser Faden und Achse zusammen, $R_w = \frac{F+D_A}{4}$: wirksamer Radius*

	Wert	Fehler
D_A		
F		
R_w		

Fehlerformel von R_w:

Tabelle 7.6: *Gesamtmasse des Fallrads inkl. Fehler. ρ: Dichte, V: Volumen, m_{ring}: Masse des Rings, m_{ges}: Gesamtmasse*

	Wert	Fehler
ρ in g/cm^3		
m_{ring} in g (aus ρ und V)		
m_{ges} in g (nach Gleichung (4.5))		
$m_{\text{ring}}/m_{\text{ges}}$		

Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?

7.4 Bestimmen Sie für jede Fallhöhe h die mittlere Kraft K im Umkehrpunkt.

Tabelle 7.7: *Mittlere Kraft im Umkehrpunkt inkl. Fehler*

h in cm	K in N	K in dyn	K in kp

7.5 Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Diskutieren Sie in eigenen Worten die Ergebnisse (Aufgabenstellen in Kapitel 6, 5.) und mögliche Fehlerquellen ausführlich.

8 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

8.1 Bewegung des Fallrads

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung des Fallrads gibt es zwei mögliche Ansätze: Über die Drehmomente und über eine Energiebetrachtung. Die verwendeten Bezeichnungen werden in Abbildung 8.1 verdeutlicht.

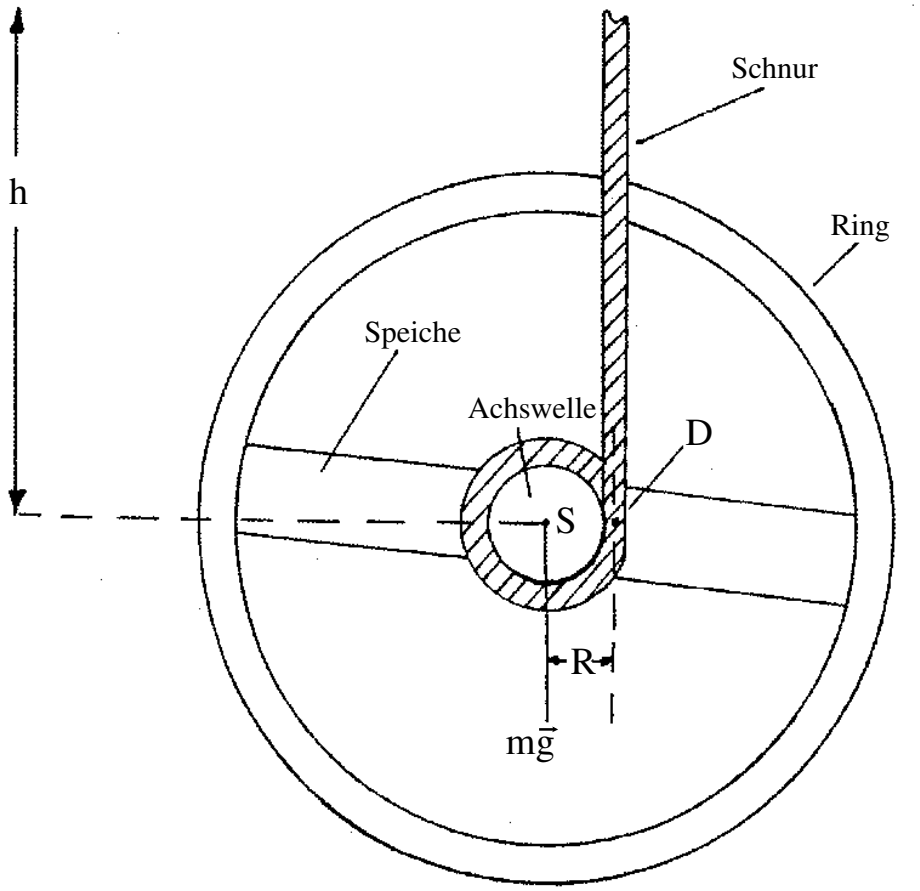


Abbildung 8.1: *Zur Herleitung der Bewegungsgleichung des Maxwell'schen Falrads.*

8.1.1 Drehmomentansatz

Das Fallrad wird über den Punkt D in der Mitte des Fadens abrollen. In Bewegung gesetzt wird es durch das Drehmoment $\vec{M}$, das dadurch ausgelöst wird, dass die Schwerkraft $\vec{F}_G$ im Schwerpunkt S angreift, das Rad aber auf der Mitte des Fadens unterstützt wird. Der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt wird wirksamer Radius R genannt. Es gilt also:

$$\vec{M} = \vec{F}_G \times \vec{R} \,, \tag{8.1}$$

$$\Rightarrow M = m_{ges} g R \,. \tag{8.2}$$

Das Drehmoment $\vec{M}$ löst eine Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ aus:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}} = I_D\dot{\vec{\omega}} \,, \tag{8.3}$$

$$\Rightarrow M = I_D\dot{\omega} \,. \tag{8.4}$$

Dabei ist $\vec{L}$ der Drehimpuls, I der Trägheitstensor und I_D das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Faden. Es ergibt sich aus dem Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes I_S nach dem Satz von Steiner zu:

$$I_D = I_S + m_{ges} R^2 \,, \tag{8.5}$$

mit der Masse des Fallrads m_{ges}. Setzt man nun die beiden Ausdrücke für das Drehmoment M gleich und berücksichtigt den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Geschwindigkeit $\dot{h}$

$$\omega = \frac{\dot{h}}{R} \,, \tag{8.6}$$

so ergibt sich schnell die Bewegungsgleichung des Fallrads:

$$\ddot{h}(t) = \frac{m_{ges} g R^2}{I_S + m_{ges} R^2} =: f \,. \tag{8.7}$$

Diese lässt sich durch zweimaliges Integrieren leicht lösen und es ergibt sich das Weg-Zeit-Gesetz (4.1). Hierbei geht man von einer Anfangshöhe h_0 und einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ aus.

8.1.2 Energieansatz

Die Gesamtenergie des Fallrads setzt sich zusammen aus der Translationsenergie, der Rotationsenergie und der potentiellen Energie und ist zeitlich konstant:

$$E_{ges} = E_{trans} + E_{rot} + E_{pot} \,, \tag{8.8}$$

$$\dot{E}_{ges} = 0 \,. \tag{8.9}$$

Unter Verwendung von

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m_{ges} \dot{h}^2 \,, \tag{8.10}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_S \omega^2 = \frac{1}{2} I_S \frac{\dot{h}^2}{R^2} \,, \tag{8.11}$$

$$E_{pot} = m_{ges} g \left(h_0 - h\right) \,, \tag{8.12}$$

folgt:

$$0 = \dot{h} \cdot \left(\left(m_{ges} + \frac{I_S}{R^2} \right) \ddot{h} - m_{ges} g \right) \ . \tag{8.13}$$

Woraus sich sofort die Bewegungsgleichung (8.7) ergibt.

8.2 Wirksamer Radius

Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$R^2 = \frac{f I_S}{m_{ges} g \left(1 - \frac{f}{g} \right)} \tag{8.14}$$

Da $f/g \ll 1$, lässt sich hierfür näherungsweise schreiben:

$$R^2 \approx \frac{I_S f}{m_{ges} g} \tag{8.15}$$

8.3 Kräfte

8.3.1 Zugkraft an der Aufhängvorrichtung

Das Rad erfährt trotz der angreifenden Erdbeschleunigung g nur die Beschleunigung f (siehe (8.7)). Der übrige Anteil der Erdbeschleunigung wird also durch die Aufhängevorrichtung getragen:

$$\begin{aligned} F_Z &= m_{ges} \left(g - f \right) \\ &= m_{ges} g \left(1 - \frac{m_{ges} R^2}{I_S + m_{ges} R^2} \right) \end{aligned} \tag{8.16}$$

8.3.2 Mittlere Kraft im Umkehrpunkt

Ist die Schnur komplett abgewickelt, kehrt das Fallrad seine Bewegungsrichtung um und ändert dabei seine Geschwindigkeit von $\dot{h}$ auf $-\dot{h}$. Die Impulsänderung dabei ist also

$$\Delta p = 2 m_{ges} \dot{h} \ . \tag{8.17}$$

Die Zeit Δt, in der diese Umkehr stattfindet, ist in erster Näherung die Zeit, die der Schwerpunkt S mit der Winkelgeschwindigkeit ω benötigt, um den Winkel π zu durchlaufen (vgl. Abbildung 8.2). Mit $\omega = \dot{h}/R$ ergibt sich also für die mittlere Kraft im Umkehrpunkt:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 m_{ges} \dot{h}^2}{\pi R} \tag{8.18}$$

Für den Fall konstanter Beschleunigung gilt $\dot{h}^2 = 2fh$. Damit ergibt sich:

$$K = \frac{4 m_{ges} f h}{\pi R} \ . \tag{8.19}$$

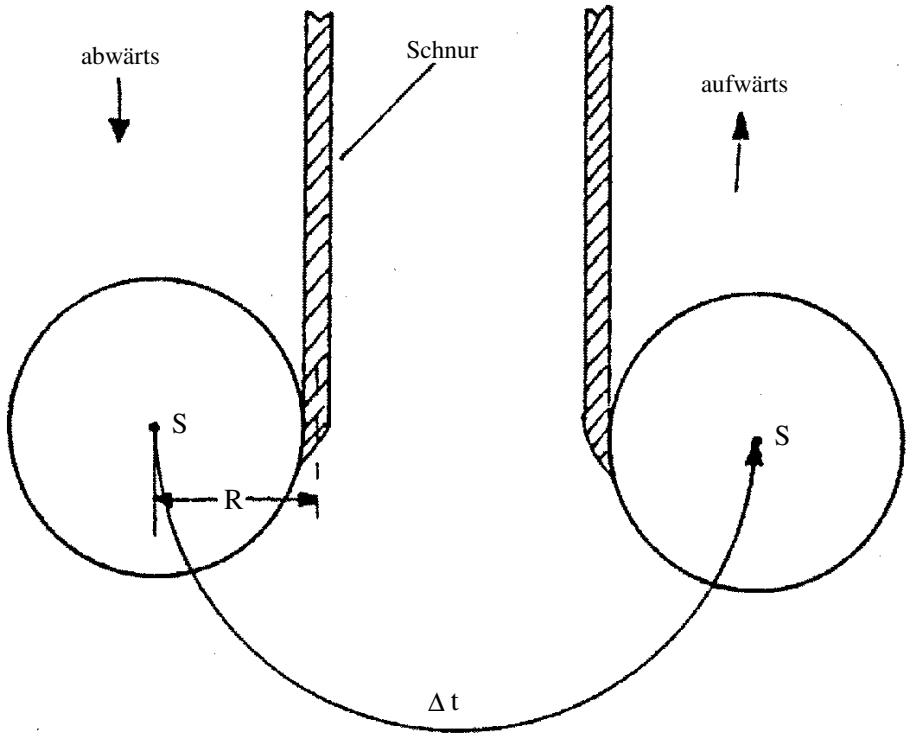


Abbildung 8.2: *Zur Berechnung der mittleren Kraft im Umkehrpunkt*

9 Literatur

- Fehlerrechnung:
  https://teaching.astro.uni-koeln.de/sites/default/files/praktikum_a/Anleitung_zur_Fehlerrechnung.pdf
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Frauenfelder und Huber: Physik I
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
  http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994