

Versuch M7 für Nebenfächler

Rotations- und Translationsbewegung

I. Physikalisches Institut, Raum HS126
Stand: 21. Oktober 2015



generelle Bemerkungen

- bitte Versuchsaufbau (Nummer) angeben
- bitte Versuchspartner angeben
- bitte Versuchsbetreuer angeben
- bitte nur handschriftliche Auswertung

1 Einleitung

In diesem Versuch sollen Sie sich mit den Grundlagen von Rotations- und Translationsbewegungen vertraut machen. Am Beispiel des Maxwell'schen Fallrads untersuchen Sie eine Bewegung, die sowohl Rotations- als auch Translationsanteile enthält. Dabei setzen Sie sich auch mit Trägheitsmomenten bezüglich verschiedener Rotationsachsen auseinander.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:

- Allgemeine Begriffe: Erdbeschleunigung, freier Fall, Erhaltungssätze, Fehlerfortpflanzung
- Translationsbewegung: Definition, Impuls, Kraft, kinetische Energie
- Rotationsbewegung: Definition, Trägheitsmoment, Drehimpuls, Drehmoment, kinetische Energie, Beziehung zur Translation, Satz von Steiner

2. Bewegung des Fallrads:

- Leiten Sie die Bewegungsgleichung (13) einmal mit Drehmomentansatz und einmal mit Energieansatz her und geben Sie ihre physikalische Interpretation an. Bestätigen Sie insbesondere, dass die Beschleunigung $\dot{h}(t)$ zeitlich konstant ist.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichung.

3. Wirksamer Radius:

- Erläutern Sie, warum der wirksame Radius R durch (4) gegeben ist.
- Zeigen Sie, dass er näherungsweise durch (5) berechnet werden kann.

4. Kräfte:

- Zeigen Sie, dass die Kraft F_Z mit der das Fallrad an der Aufhängevorrichtung zieht sowohl für die Abwärts- als auch für die Aufwärtsbewegung gegeben ist durch (22).
- Zeigen Sie, dass die mittlere Kraft im Umkehrpunkt K gegeben ist durch (6).

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

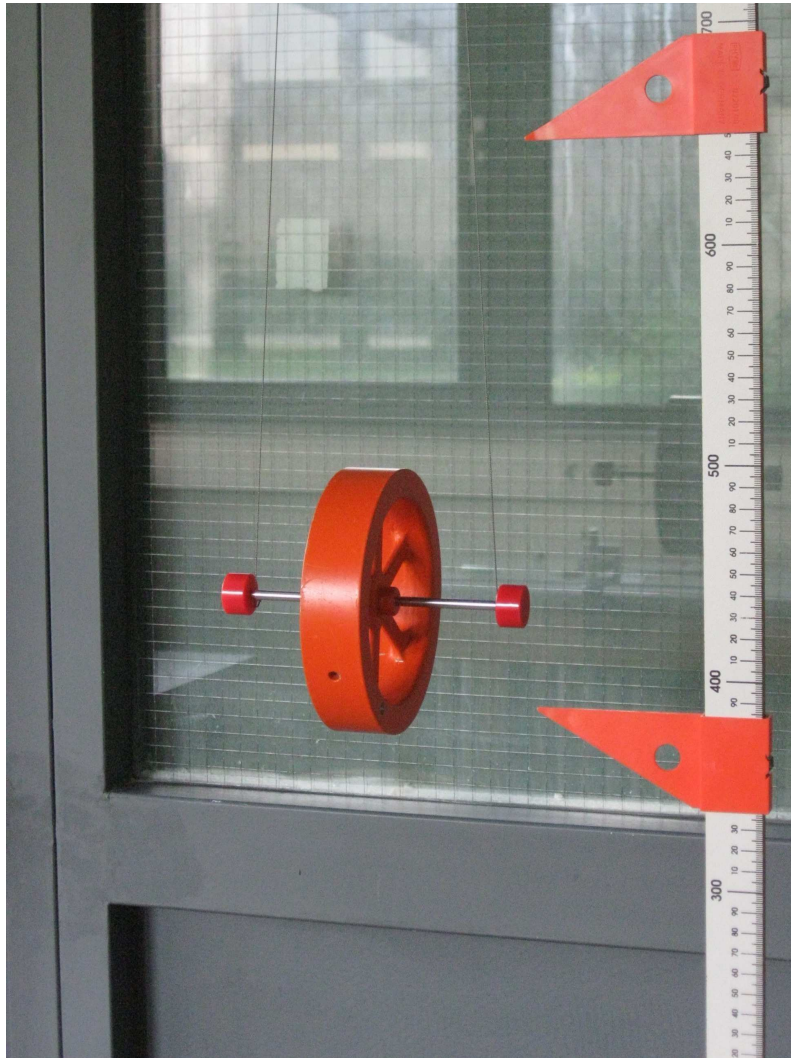


Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Das Maxwell'sche Fallrad ist an einem Stativ neben einer Messlatte aufgehängt. Zusätzlich werden eine Stoppuhr und eine Schieblehre benötigt.

Die Messlatte dient zum Ablesen der Ausgangshöhe von der das Rad hinunterfällt und der Endhöhe, bei der es umkehrt und wieder aufwärtsläuft. Die Fallzeit wird mit der Stoppuhr bestimmt. Die Schieblehre dient zum Ausmessen des Rades zur späteren Bestimmung seines Trägheitsmoments.

4 Benötigte Formeln

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 7 dieser Anleitung.

4.1 Beschleunigung des Fallrads

Das Weg-Zeit-Gesetz für ein Fallrad, das auf einer Höhe h_0 losgelassen wird, lautet

$$h(t) = \frac{1}{2}ft^2 + h_0 . \quad (1)$$

Dabei ist f die Beschleunigung des Fallrads.

4.2 Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment I eines Hohlzylinders der Dichte ρ mit den Abmessungen: Innenradius R_1 , Außenradius R_2 und Höhe H ist gegeben durch

$$I = \frac{1}{2}H\pi\rho (R_2^4 - R_1^4) . \quad (2)$$

Um den Fehler abzuschätzen, den man durch Vernachlässigung der Speichen macht betrachtet man das Verhältnis der Trägheitsmomente von Speichen und Ring unter der Annahme, dass die Massen des Rings m_R und der Speichen m_{Sp} bei bestimmten Radien r_{Sp} und r_R konzentriert seien.

$$\frac{I_{Sp}}{I_R} = \frac{m_{Sp}r_{Sp}^2}{m_Rr_R^2} . \quad (3)$$

Daher müssen Sie für das Verhältnis der Trägheitsmomente nur sinnvolle Verhältnisse der entsprechenden Massen und Radien abschätzen und diese multiplizieren. (Tipp: das Verhältnis der Massen ist gleich dem Verhältnis der Volumina, da Speichen und Ring aus demselben Material bestehen.)

4.3 Wirksamer Radius

Der wirksame Radius R des Fallrads liegt auf der Mitte des Fadens, er ist also gegeben durch den Radius der Achse R_A und den des Fadens R_F als

$$R = R_A + R_F . \quad (4)$$

Daraus kann man mithilfe von

$$R^2 \approx \frac{I_S f}{m_{ges} g} \quad (5)$$

die Gesamtmasse des Fallrads m_{ges} berechnen. g ist die Erdbeschleunigung.

4.4 Umkehrpunkt

Die mittlere Kraft im Umkehrpunkt ist gegeben durch

$$K = \frac{4m_{ges}fh}{\pi R} . \quad (6)$$

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

1. Eingewöhnung

Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten.

Zeichnen Sie eine Versuchsskizze in Ihr Protokollheft. Überprüfen Sie dann die Position des unteren Schiebers für die Höhe des Umkehrpunktes (also die Höhe auf der das Fallrad am abgerollten Faden hängt).

2. Messung

Geben Sie für alle gemessenen Größen die zugehörigen Fehler an.

(a) **Bestimmen Sie die Fallzeit t als Funktion der Fallhöhe h .**

Stoppen Sie dazu für fünf verschiedene Fallhöhen h die zugehörige Fallzeit t jeweils fünf mal.

(b) **Bestimmen Sie die Maße des Fallrades, die Sie zur Berechnung seines Trägheitsmoments I_S benötigen.**

Messen Sie dazu die Breite B , die Tiefe T und den Außendurchmesser D_R des Ringes je fünf mal an *verschiedenen* Stellen. Fertigen Sie in ihrem Protokollheft eine Skizze an, die die Bezeichnungen verdeutlicht.

(c) **Bestimmen Sie die Maße, die Sie zur Berechnung des wirksamen Radius R benötigen.**

Hierfür müssen Sie den Durchmesser der Achse D_A und den des Fadens D_F ermitteln. Um den Fadendurchmesser zu bestimmen, wickeln Sie den Faden einige Male dicht nebeneinander um die Achse und messen den Durchmesser $F = D_A + 2 \cdot D_F$. Führen Sie diese beiden Messungen wieder jeweils fünf mal aus.

6 Auswertung und Diskussion (zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

- Bestimmen Sie die Beschleunigung f des Fallrads, sowie das Verhältnis $\frac{f}{g}$.**
Tragen Sie zunächst die gemessenen Fallhöhen h gegen die zugehörigen Fallzeiten t auf und skizzieren Sie den erwarteten Verlauf in diesem Diagramm. Danach tragen Sie h gegen t^2 auf und führen eine graphische Geradenanpassung durch. Aus der Steigung können Sie den Wert der Beschleunigung f und deren Verhältnis zur Erdbeschleunigung $\frac{f}{g}$ berechnen (vgl. (1)).
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_S des Fallrads.**
Der Ring des Fallrads ist ein Hohlzylinder, dessen Trägheitsmoment sich nach Formel (2) berechnet. Das hier verwendete Fallrad besteht aus Aluminium. Um das Trägheitsmoment zu berechnen, schlagen Sie bitte dessen Dichte nach und geben die Quelle an.
Speichen und Achse des Fallrads werden hier vernachlässigt. Schätzen Sie den Fehler ab, den man dadurch macht, indem Sie das Verhältnis der Trägheitsmomente von Speichen und Ring (3) abschätzen.
Vergleichen Sie nun den geschätzten Fehler durch die Vernachlässigung der Speichen mit dem Fehler, der sich nach Gauß'scher Fehlerfortpflanzung aus Ihren Messungenauigkeiten für das Trägheitsmoment ergibt. Hierzu eignen sich am besten die relativen Fehler.
- Berechnen Sie die Massen des Fallrads m_{ges} und des Rings m_R .**
Ermitteln Sie dazu zunächst den wirksamen Radius gemäß (4) und berechnen Sie daraus die Gesamtmasse mithilfe von (5). Berechnen Sie dann die Masse des Rings mithilfe seines Volumens und der Dichte. Wieviel Prozent der Gesamtmasse sind im Ring konzentriert? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem geschätzten Verhältnis der Trägheitsmomente.
- Bestimmen Sie für jede Fallhöhe h die mittlere Kraft K im Umkehrpunkt.**
Berechnen Sie die Kräfte nach (6) und geben Sie die Werte in Newton und dyn an.
- Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.**
Entsprechen die Verläufe der Diagramme Ihren Erwartungen? Erscheint Ihnen die Näherung für die Trägheitsmomente sinnvoll? Dürfte man diese Näherung auch für die Massen machen? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

7 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

7.1 Bewegung des Fallrads

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung des Fallrads gibt es zwei mögliche Ansätze: Über die Drehmomente und über eine Energiebetrachtung. Die verwendeten Bezeichnungen werden in Abbildung 2 verdeutlicht.

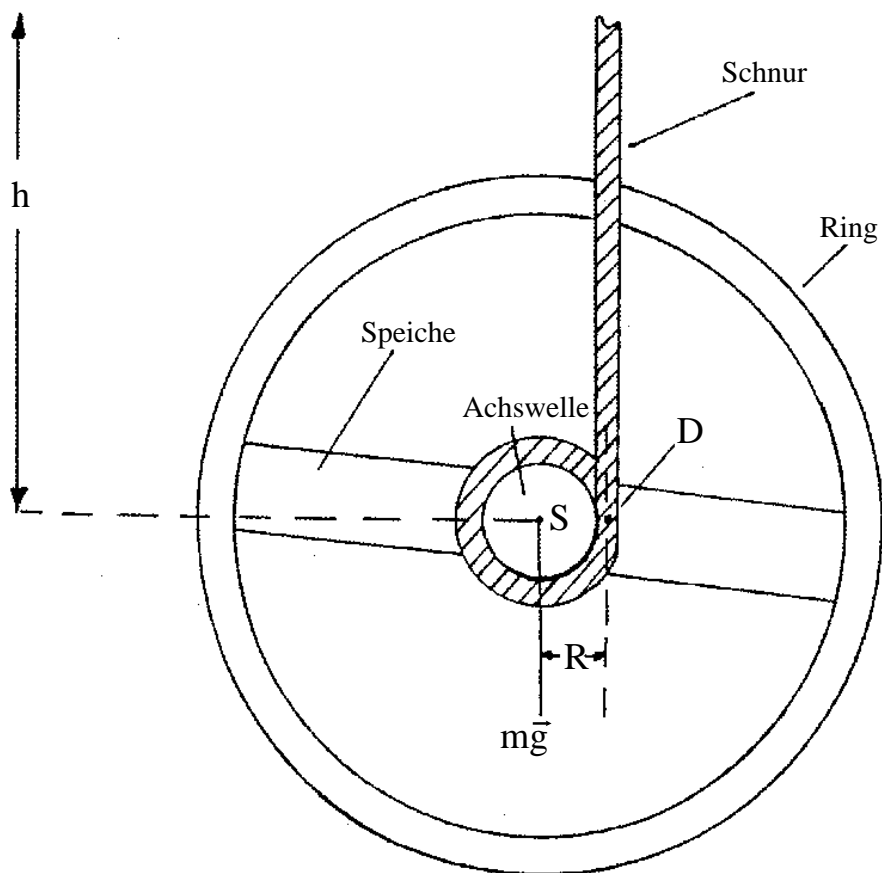


Abbildung 2: Zur Herleitung der Bewegungsgleichung des Maxwell'schen Fallrads.

7.1.1 Drehmomentansatz:

Das Fallrad wird über den Punkt D in der Mitte des Fadens abrollen. In Bewegung gesetzt wird es durch das Drehmoment \vec{M} , das dadurch ausgelöst wird, dass die Schwerkraft \vec{F}_G im Schwerpunkt S angreift, das Rad aber auf der Mitte des Fadens unterstützt wird. Der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt wird wirksamer Radius R genannt. Es gilt

also:

$$\vec{M} = \vec{F}_G \times \vec{R} , \quad (7)$$

$$\Rightarrow M = m_{ges} g R . \quad (8)$$

Das Drehmoment \vec{M} löst eine Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ aus:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \mathbf{I} \dot{\vec{\omega}} = I_D \dot{\vec{\omega}} , \quad (9)$$

$$\Rightarrow M = I_D \dot{\omega} . \quad (10)$$

Dabei ist \vec{L} der Drehimpuls, \mathbf{I} der Trägheitstensor und I_D das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Faden. Es ergibt sich aus dem Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes I_S nach dem Satz von Steiner zu:

$$I_D = I_S + m_{ges} R^2 , \quad (11)$$

mit der Masse des Fallrads m_{ges} . Setzt man nun die beiden Ausdrücke für das Drehmoment M gleich und berücksichtigt den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Geschwindigkeit \dot{h}

$$\omega = \frac{\dot{h}}{R} , \quad (12)$$

so ergibt sich schnell die Bewegungsgleichung des Fallrads:

$$\ddot{h}(t) = \frac{m_{ges} g R^2}{I_S + m_{ges} R^2} =: f . \quad (13)$$

Diese lässt sich durch zweimaliges Integrieren leicht lösen und es ergibt sich das Weg-Zeit-Gesetz (1). Hierbei geht man von einer Anfangshöhe h_0 und einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ aus.

7.1.2 Energieansatz

Die Gesamtenergie des Fallrads setzt sich zusammen aus der Translationsenergie, der Rotationsenergie und der potentiellen Energie und ist zeitlich konstant:

$$E_{ges} = E_{trans} + E_{rot} + E_{pot} , \quad (14)$$

$$\dot{E}_{ges} = 0 . \quad (15)$$

Unter Verwendung von

$$E_{trans} = \frac{1}{2} m_{ges} \dot{h}^2 , \quad (16)$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_S \omega^2 = \frac{1}{2} I_S \frac{\dot{h}^2}{R^2} , \quad (17)$$

$$E_{pot} = m_{ges} g (h_0 - h) , \quad (18)$$

folgt:

$$0 = \dot{h} \cdot \left(\left(m_{ges} + \frac{I_S}{R^2} \right) \ddot{h} - m_{ges} g \right) . \quad (19)$$

Woraus sich sofort die Bewegungsgleichung (13) ergibt.

7.2 Wirksamer Radius

Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$R^2 = \frac{f I_S}{m_{ges} g \left(1 - \frac{f}{g}\right)} \quad (20)$$

Da $f/g \ll 1$, lässt sich hierfür näherungsweise schreiben:

$$R^2 \approx \frac{I_S f}{m_{ges} g} \quad (21)$$

7.3 Kräfte

7.3.1 Zugkraft an der Aufhängvorrichtung

Das Rad erfährt trotz der angreifenden Erdbeschleunigung g nur die Beschleunigung f (siehe (13)). Der übrige Anteil der Erdbeschleunigung wird also durch die Aufhängevorrichtung getragen:

$$\begin{aligned} F_Z &= m_{ges} (g - f) \\ &= m_{ges} g \left(1 - \frac{m_{ges} R^2}{I_S + m_{ges} R^2}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

7.3.2 Mittlere Kraft im Umkehrpunkt

Ist die Schnur komplett abgewickelt, kehrt das Fallrad seine Bewegungsrichtung um und ändert dabei seine Geschwindigkeit von \dot{h} auf $-\dot{h}$. Die Impulsänderung dabei ist also

$$\Delta p = 2m_{ges} \dot{h} . \quad (23)$$

Die Zeit Δt , in der diese Umkehr stattfindet, ist in erster Näherung die Zeit, die der Schwerpunkt S mit der Winkelgeschwindigkeit ω benötigt, um den Winkel π zu durchlaufen (vgl. Abbildung 3). Mit $\omega = \dot{h}/R$ ergibt sich also für die mittlere Kraft im Umkehrpunkt:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m_{ges} \dot{h}^2}{\pi R} \quad (24)$$

Für den Fall konstanter Beschleunigung gilt $\dot{h}^2 = 2fh$. Damit ergibt sich:

$$K = \frac{4m_{ges} f h}{\pi R} . \quad (25)$$

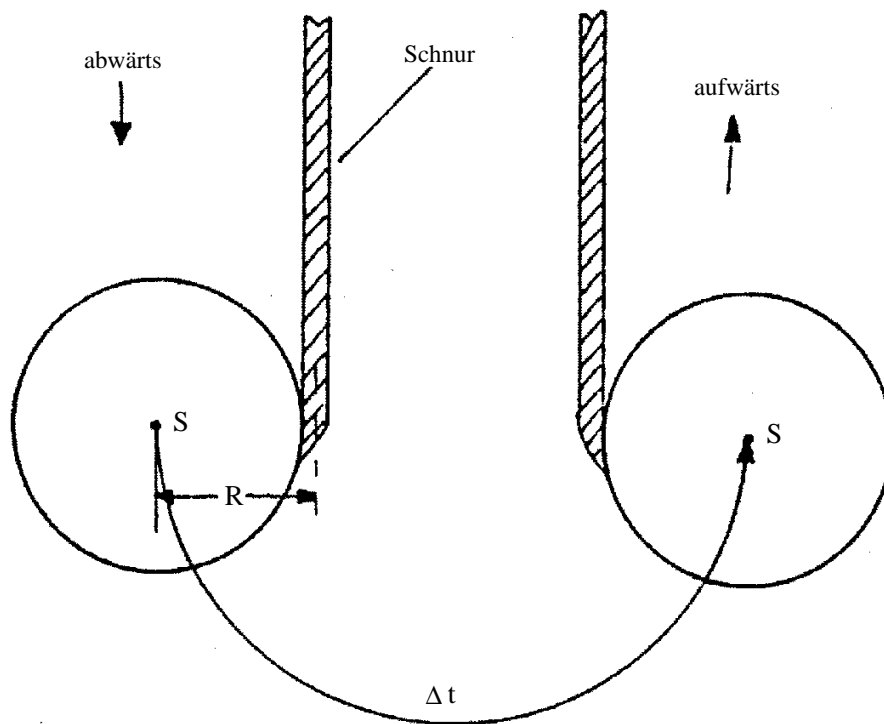


Abbildung 3: Zur Berechnung der mittleren Kraft im Umkehrpunkt

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Frauenfelder und Huber: Physik I
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994