Versuch M6 für Physiker
Trägheitsmoment und Drehschwingungen

I. Physikalisches Institut, Raum HS126
Stand: 21. Oktober 2015

Generelle Bemerkungen

- **bitte Versuchsaufbau (rechts, mitte, links) angeben**
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

Schwingungsprozesse spielen in der gesamten Physik eine wichtige Rolle. Ebenso sind Drehbewegungen von elementarer Bedeutung. Dieser Versuch erlaubt über die Kombination dieser beiden Bewegungsarten eine Aussage über das Trägheitsverhalten verschiedener Körper bzgl. Drehungen – das Trägheitsmoment wird als die charakterisierende physikalische Größe eingeführt. Einige elementare Eigenschaften wie der *Steinersche Satz* und das *Additionstheorem für die Trägheitsmomente flacher Körper* werden experimentell überprüft.

2 Vorbereitung (zu Hause)

1. was Sie zur Vorbereitung lernen sollten (Literaturhinweise gibt es im Anhang):
   - Drehbewegung starrer Körper
   - Trägheitsmomente (Definition und Berechnung)
   - Steinerscher Satz
   - Drehpendel
   - harmonische Drehschwingung (harmonischer Oszillator)
   - Hookesches Gesetz
2. Herleitung der Beziehung $I = \frac{D^*\,T^2}{4\,\pi^2}$ (Gleichung (7)) mit Erläuterung und Lösung der Differentialgleichung.
3. Formale Herleitung des Steinerschen Satzes und des Additionstheorems.
4. Hausaufgabe: Wie groß ist das Trägheitsmoment der Messapparatur im Vergleich zu den typischen Trägheitsmomenten der Probekörper und damit die Verfälschung der Ergebnisse durch den Aufbau? Gehen Sie für die Abschätzung von folgendem idealisiertem Aufbau aus: Die Drillachse besteht aus zwei zusammengefügten Vollzylindern aus Stahl. Die Maße sind Abbildung 1 zu entnehmen. Für die Dichte von Stahl nehmen Sie bitte $7850\,\mathrm{kg/m^3}$ an. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Drillachse. Als Beispiel für einen typischen Probekörper berechnen Sie bitte das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius $R = 5\,\mathrm{cm}$ und der Masse $M = 500\,\mathrm{g}$. Wie groß ist das Verhältnis der Trägheitsmomente und was schließen Sie daraus für den Einfluss der Apparatur auf die Messergebnisse?

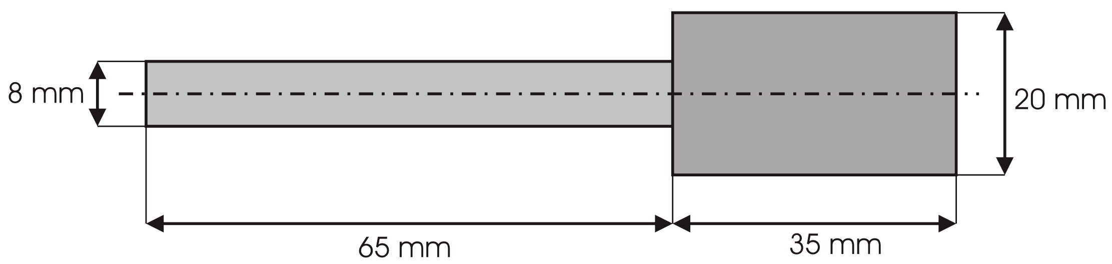
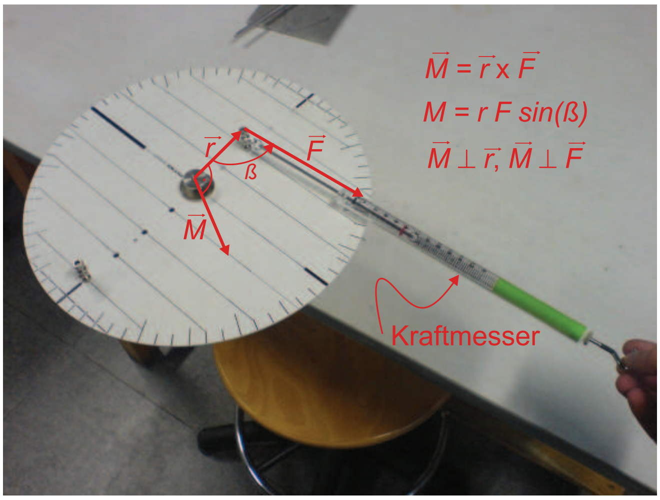


Abbildung 1: Vereinfachte schematische Darstellung der Drillachse

3 Versuchsaufbau und -beschreibung



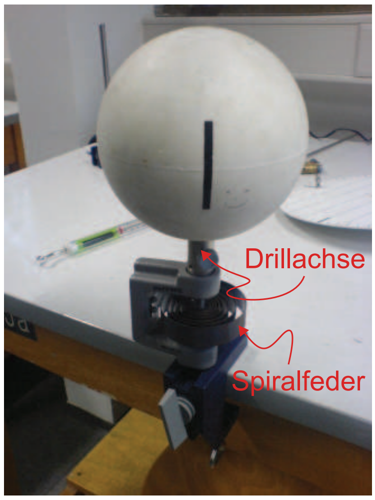


Abbildung 2: Das Drehpendel zur Bestimmung von Trägheitsmomenten.
Links: Mit dem Feder-Kraftmesser wird eine Kraft auf einen Hebelarm ausgeübt. Das Drehmoment führt zu einer Auslenkung um einen Winkel φ.
Rechts: Zur Bestimmung des Trägheitsmoments der Kugel wird das Drehpendel in Schwingungen versetzt. Die Periodendauer T ist abhängig vom Trägheitsmoment der Kugel I_K und von der Winkelrichtgröße D^*.

Der Versuchsaufbau besteht aus einer vertikal fixierten Drehachse mit angebrachter Spiralfeder. Für die vier Versuchsteile stehen folgende Zusatzmaterialien zur Anbringung auf die Drehachse zur Verfügung:

- Eine Winkelscheibe mit Befestigungsmöglichkeiten für den Federkraftmesser zur statischen Messung der Winkelrichtgröße,
- eine Kunststoffkugel,
- eine Stahlstange mit Markierungen und Halterung,
- ein flacher Quader mit Befestigungsstücken zur Rotation um die Hauptträgheitsachsen.

4 Theoretische Grundlagen

Analog zur Beschreibung der Kinematik von Translationsbewegungen mittels Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung verwendet man für Drehbewegungen die Winkelposition $\vec{\phi}$, die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{\phi}}$ und die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$. Der vektorielle Charakter dieser Größen beinhaltet Richtung und Drehsinn (sogenannte *axiale* Vektoren – ändern im Gegensatz zu normalen *polaren* Vektoren bei Punktspiegelungen ihr Vorzeichen nicht).
Zur Beschreibung der Dynamik des betrachteten Systems bedient man sich in der klassischen Mechanik des 2. Newtonschen Axioms, welches beschleunigte Bewegungen (genauer: zeitliche Änderungen des Impulses $\vec{p} = m\,\vec{v}$, mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$) mit wirkenden Kräften $\vec{F}$ über die sogenannten Bewegungsgleichungen $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ in Beziehung setzt. Dieses formuliert man für Rotationsbewegungen nach Einführung des *Drehmomentes* $\vec{M}$ und des Drehimpulses $\vec{L}$ als

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} \qquad . \tag{1}$$

Der Drehimpuls ist damit bei Abwesenheit eines äußeren Drehmomentes, d.h. für ein *abgeschlossenes System*, zeitlich konstant und somit eine *Erhaltungsgröße*. Er steht zum Impuls $\vec{p}$ über

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2}$$

in Beziehung, wobei $\vec{r}$ den sogenannten *Hebelarm*, also den Verbindungsvektor von Drehachse und Ursprungspunkt des Impulsvektors, und $\times$ das als *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* bekannte Produkt zweier dreidimensionaler Vektoren bezeichnen. Zeitliche Ableitung liefert damit nach Gleichung (1) das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.
Formal analog zum Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}$ kann der Drehimpuls als $\vec{L} = \mathcal{I}\,\vec{\omega}$ mit dem Trägheitstensor $\mathcal{I}$ ausgedrückt werden. Das Trägheitsmoment $\mathcal{I}$ wird hier als tensorielle Größe benötigt, um die im Allgemeinen vorhandene Anisotropie der Massenverteilung des betrachteten Körpers zu berücksichtigen – denn die Trägheitseigenschaften bzgl. Drehungen des Körpers hängen offenbar von der Richtung der Drehachse ab. Der Trägheitstensor ist diagonalisierbar durch Übergang in das Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen und nimmt dort die Form

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

an.
Für diesen Versuch genügt die skalare Beziehung

$$M = I\,\alpha = I\,\ddot{\phi} \tag{4}$$

da hier nur das Trägheitsmoment bezüglich einer festen Drehachse betrachtet wird und I zeitlich konstant ist.
Das Drehmoment wird in diesem Versuch durch eine Spiralfeder erzeugt. Für eine ideale Feder gilt nach dem Hookeschen Gesetz Proportionalität zwischen Auslenkung und auslenkendem Drehmoment. Da das rücktreibende dem auslenkenden Drehmoment entgegen wirkt ergibt sich damit für das bewegungsbestimmende Drehmoment folgende Beziehung

$$M = -D^*\,\phi \qquad . \tag{5}$$

Damit ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$I\,\ddot{\phi} = -D^*\,\phi \qquad , \tag{6}$$

die es zu lösen gilt. Diese Differentialgleichung des Auslenkwinkels ϕ als Funktion der Zeit t wird durch eine harmonische Schwingung gelöst mit dem für die Auswertung essenziellen Zusammenhang von Trägheitsmoment I und Schwingungsdauer T

$$I = \frac{D^* \, T^2}{4\,\pi^2} \qquad . \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment einer gegebenen Massenverteilung bezüglich einer gegebenen Achse lässt sich durch

$$I = \sum_{i=1}^{N} r_{\perp,i}^2 \, m_i \underset{N\to\infty,\, m_i\to 0}{\longrightarrow} \int_V r_\perp^2 \, \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r \tag{8}$$

darstellen. Hier bezeichnen N die Zahl der Massenelemente für die Summation, $r_\perp$ den senkrechten Abstand des Massenelementes von der Drehachse, $\rho(\vec{r})$ die Massendichte als Funktion des Ortes und $\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}V$ das Volumendifferential. Der Übergang von diskreter Summation über endlich viele (N) Massenelemente zu kontinuierlicher Integration über das Volumen V des betrachteten Körpers ist für das physikalische Verständnis nicht so wichtig, erlaubt aber die Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung des Trägheitsmomentes geometrischer Körper [1].
Der Satz von Steiner ergibt sich aus Beziehung (8) und der Einsicht, dass sich das Trägheitsmoment um eine bestimmte Drehachse aus einem Beitrag der Rotation der durch seinen Schwerpunkt gehenden parallelen Achse I_S (welchen man als *Eigenträgheitsmoment* bezeichnen könnte) und einem Beitrag der Rotation des Körpers als Ganzes um die betrachtete Drehachse (*Bahnträgheitsmoment*) zusammensetzt. Für das Bahnträgheitsmoment ist die Ausdehnung des Körpers dabei nicht von Bedeutung, so dass dieser als an seinem Schwerpunkt befindliche Punktmasse M betrachtet werden kann. Die, i.A. beliebig komplexe, Massenverteilung des Körpers kommt damit nur im Eigenträgheitsmoment I_S zum Tragen. Formal kann man damit schreiben

$$I = I_\mathrm{S} + M\,a^2 \tag{13}$$

wobei a den Abstand der parallelen Drehachsen bezeichnet.

[1] Als Beispiel zeigen wir eine elegante Herleitung des Trägheitsmomentes einer Kugel mit homogener Massendichte ρ wie sie in der Auswertung eines Studierenden im SS 2010 vorgeführt worden ist. Ausnutzung der Kugelsymmetrie in welcher alle Drehachsen offenbar gleichberechtigt sind und somit jede Achse Hauptträgheitsachse mit identischem Trägheitsmoment I ist erlaubt die Berechnung von I via

$$I = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{3} I_k = \rho \, \frac{1}{3} \int_V \left(\sum_{k=1}^{3} r_{\perp,k}^2 \right) \mathrm{d}^3 r \qquad . \tag{9}$$

Mit der Summation von $r_{\perp,k}^2$ über die drei (beliebig wählbaren) Raumrichtungen (indiziert mit $_k$) ergibt sich $\sum_{k=1}^3 r_{\perp,k}^2 = \sum_{k=1}^3 \left(r^2 - r_k^2\right) = 3\,r^2 - \sum_{k=1}^3 r_k^2 = 3\,r^2 - r^2 = 2\,r^2$ und damit

$$I = \rho \, \frac{2}{3} \int_V r^2 \, \mathrm{d}^3 r \qquad . \tag{10}$$

In Kugelkoordinaten lautet das Integral damit $\int_V r^2 \, \mathrm{d}^3 r = \int_0^{2\,\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \, r^2 \, \sin(\vartheta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$. Integration über den Azimutwinkel φ ergibt $2\,\pi$. Integration über den Zenitwinkel ϑ von 0 (Nordpol) nach π (Südpol) liefert $\int_0^{\pi} \sin(\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$. Schließlich ergibt das Integral über den Kugelradius $\int_0^R r^4 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{5} R^5$. Damit erhält man insgesamt

$$I = \rho \, \frac{2}{3} \, 4\,\pi \, \frac{1}{5} \, R^5 = \frac{2}{5} \, \rho \left(\frac{4\,\pi}{3} \, R^3 \right) R^2 \qquad . \tag{11}$$

Identifikation von Massendichte ρ mal Kugelvolumen $\frac{4\pi}{3} R^3$ mit der Masse der Kugel M liefert endlich

$$I = \frac{2}{5} \, M \, R^2 \tag{12}$$

.

Das Additionstheorem für die Trägheitsmomente flacher Körper (Gleichung (14)) ergibt sich aus (8) durch Vergleich der Trägheitsmomente entlang der Hauptträgheitsachsen (welche unter der Annahme homogener Massenverteilung mit den Symmetrieachsen übereinstimmen) unter der Annahme dass die Ausdehnung entlang einer Hauptträgheitsachse sehr viel kleiner als die Ausdehnungen entlang der Anderen ist.

5 Versuchsdurchführung

Der Versuch besteht aus mehreren Teilen. Im ersten Teil soll die Winkelrichtgröße D^* der Spiralfeder bestimmt werden. In Teil 2 messen Sie das Trägheitsmoment einer als Drehpendel schwingenden Kugel und vergleichen den experimentell erhaltenen mit dem theoretischen Wert, den Sie aus der Masse und dem Radius ermitteln. Der dritte Teil beschäftigt sich mit der experimentellen Bestätigung des Steinerschen Satzes und die vierte und letzte Aufgabe des Versuchs besteht im Nachweis eines Additionstheorems für die Trägheitsmomente eines flachen Körpers.
Die Auslenkung der Spiralfeder sollte 360° **nicht überschreiten**! Achten Sie darauf alle relevanten Messwerte zu notieren!

5.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Für diesen Versuchsteil bringen Sie bitte die Winkelscheibe an der Drillachse an. In verschiedenen Abständen von der Drehachse finden Sie Schrauben angebracht, in die Sie den Haken eines Feder-Kraftmessers einhängen können. Nun gilt es, den Auslenkwinkel in Abhängigkeit vom angewendeten Drehmoment zu bestimmen.
Dazu lenken Sie nun die Winkelscheibe aus der Ruhelage aus und halten diese Position mithilfe des Feder-Kraftmessers. Dabei muss die Kraft senkrecht zum Hebelarm angreifen, damit eine einfache Bestimmung des Drehmoments möglich ist. Dazu achten Sie darauf, dass die Federwaage parallel zu den eingezeichneten Hilfslinien auf der Scheibe gehalten wird. Notieren Sie die Kraft der Feder, die Länge des Hebelarms (Abstand Schraube – Drehachse) und den Auslenkwinkel. (Vorher die Ruhelage möglichst genau bestimmen.)
Messen Sie acht unterschiedliche Winkelpositionen in jede Auslenkungsrichtung der Winkelscheibe. Dazu stehen zwei Hebelarme zur Verfügung. Überlegen Sie sich welchen Hebelarm Sie sinnvoller Weise zur Auslenkung verwenden.

5.2 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Vollkugel

Für die folgenden Versuchsteile wird die Winkelscheibe nicht mehr benötigt. Nehmen Sie sie ab und bringen Sie für diesen Versuchsteil die Kugel auf dem Drehpendel an und bestimmen Sie fünf Mal die Zeit für etwa 10 Schwingungen der schwingenden Kugel. Notieren Sie sich die Masse der Kugel und messen Sie mit der Schieblehre den Durchmesser idealer Weise mehrmals an verschiedenen Positionen senkrecht zur Drehachse.

5.3 Nachweis des Steinerschen Satzes

Bestimmen Sie bei der langen Eisenstange das Trägheitsmoment für zwei parallele Achsen, von denen eine durch den Schwerpunkt gehen soll. Dazu fixieren Sie den Adapter, mit dem die Stange auf dem Pendel angebracht wird, jeweils an den markierten Stellen.
Messen Sie wieder für die beide Achsen jeweils fünf Mal die Zeit für etwa 10 Schwingungen. Die Masse des Stabes ist in Teil 6.3 angegeben. Was muss für den Nachweis des Steinerschen Satzes noch gemessen werden?

5.4 Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe

Bestimmen Sie für die flache rechteckige Aluminiumscheibe die Trägheitsmomente um die drei Symmetrieachsen. Benutzen Sie hierfür die entsprechenden Adapter, um die Scheibe auf dem Drehpendel anzubringen. Messen Sie auch hier für jede Achse fünf Mal die Zeit für 10 bis 20 Schwingungen.

6 Auswertung der Messwerte und Diskussion

Denken Sie daran, alle Rechnungen und Ergebnisse (und deren Fehler) gut nachvollziehbar darzustellen. Unter Punkt 6.5 "Checkliste für die Abgabe" wollen wir Sie noch auf häufig gemachte Fehler bei der Auswertung aufmerksam machen (s.u.).

6.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*

Gehen Sie bei diesem Teil der Auswertung besonders konzentriert vor. Das hier gewonnene Teilergebnis brauchen Sie auch in anderen Teilen der Auswertung und ein Fehler pflanzt sich entsprechend fort. Beachten Sie hierzu deshalb auch unbedingt Punkt 6.5, um typische Fehler zu vermeiden.
Erstellen Sie eine Wertetabelle für das Drehmoment M in Abhängigkeit des Winkels φ (im Bogenmaß). Stellen Sie diese Wertepaare – es sollten 16 sein – mit Fehlerbalken für $\Delta\varphi$ und ΔM graphisch in einem Diagramm dar. Eine graphische Geradenanpassung liefert Ihnen die Winkelrichtgröße D^* mit dem Fehler ΔD^*.
Wegen $M = D^*\varphi$ gibt es nur eine sinnvolle Wahl für die x- und y-Achse, um D^* als Steigung der Geraden zu ermitteln. (Denken Sie an die Geradengleichung $y = mx + b$)
Ist die Annahme einer idealen Feder gerechtfertigt?

6.2 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Vollkugel

Berechnen Sie aus dem Mittelwert der Schwingungsdauer (mit dessen mittlerem quadratischen Fehler) und der im vorigen Teil bestimmten Winkelrichtgröße das Trägheitsmoment der Kugel. Beachten Sie die Fehlerfortpflanzung!
Vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit dem aus Radius und Masse nach Gleichung (12) errechneten Wert. Die Massen der mit #1, #2 und #3 markierten Kugeln betragen 618.4 g, 721.1 g und 724.6 g mit einer Unsicherheit von 0.2 g. Vergessen Sie auch bei dieser Bestimmung nicht die Fehlerrechnung!
Diskutieren Sie die Ergebnisse. Bestätigen sie die der Auswertung zu Grunde liegenden Annahmen (welche?) im Rahmen Ihrer sorgfältig ermittelten Fehler?

6.3 Nachweis des Steinerschen Satzes

Berechnen Sie auch hier aus dem Mittelwert der Schwingungsdauern die Trägheitsmomente der Stange um die beiden Drehachsen. Sind die Ergebnisse mit dem Satz von Steiner (Gleichung (13)) vereinbar? Der Stab hat eine Masse von $M = (132.6 \pm 0.5)$ g. Kann der Steinersche Satz im Rahmen der ermittelten Fehlergrenzen experimentell bestätigt werden?

6.4 Additionstheorem für das Trägheitsmoment einer flachen Scheibe

Überprüfen Sie die Beziehung für Trägheitsmomente flacher Körper (d.h. $z \simeq 0$)

$$I_z = I_x + I_y \tag{14}$$

mit den Trägheitsmomenten um die Symmetrieachsen in der Scheibenebene I_x und I_y und dem Trägheitsmoment um die Symmetrieachse senkrecht zur Scheibenebene I_z. Ist die Bestimmung der einzelnen Trägheitsmomente gemäß Gleichung (7) hierfür sinnvoll?
Beweisen Sie formal die durch Gleichung (14) gegebene Beziehung für den Grenzfall verschwindender Scheibendicke mittels der gemäß Gleichung (8) formulierten Trägheitsmomente.

6.5 Checkliste für die Abgabe

- Theoretische Grundlagen dargestellt? Insbesondere Beziehung (7) mit Erläuterung und Lösung der Differentialgleichung hergeleitet?
- Versuchsdurchführung kurz erläutert?
- Zur Auswertung:
  - Alle verwendeten Formeln (auch für Fehler) aufgeschrieben?
  - Nirgendwo Einheiten vergessen?
  - Alle Werte entsprechend ihrer Fehler genau angegeben?
  - Sinnvoll gerundet (Bei Fehlern max. 2 relevante Stellen)?
  - Bestimmung der Winkelrichtgröße D^*:
    - Zur Berechnung des Drehmomentes: Radius nicht mit Durchmesser verwechselt?
    - Winkel ins Bogenmaß umgerechnet?
    - Zur graphischen Geradenanpassung:
      - genau 2 Ausgleichsgeraden eingezeichnet?
      - mindestens 2/3 der Messpunkte innerhalb der Geraden?
      - Abweichung von einzelnen Messwerten nicht mehr als doppelter Fehler?
      - Steigungsdreiecke groß genug?
  - $I_z = I_x + I_y$ allgemein für jeden flachen Körper (nicht nur rechteckige) hergeleitet?
- Diskussion zu allen Versuchsteilen vorhanden?

7 Literatur

- Fehlerrechnung:
  `http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/`
  `http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf`
- Gerthsen: Physik
- Westphal: Physikalisches Praktikum
- Walcher: Praktikum der Physik

und weiterführende Lehrbücher der theoretischen Mechanik.