Versuch M3b für Physiker
Erzwungene Schwingung / Resonanz

I. Physikalisches Institut, Raum HS102
Stand: 3. April 2014

generelle Bemerkungen

- **bitte Versuchsaufbau (Nummer) angeben**
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

Erzwungene Schwingungen treten im Alltag, sowie in der Technik sehr häufig auf. Beispielsweise können Wind, Erdbeben, aber auch Fussgänger Gebäude und Brücken in Schwingungen versetzen. Aber auch alle Maschinen, Motoren oder ähnliches, die periodische Bewegungen ausführen, können umliegende Bauteile zum Schwingen bringen. Daher ist es sehr wichtig das Phänomen der Resonanz zu verstehen und seine möglichen Auswirkungen bei allen geplanten Konstruktionen zu berücksichtigen.

2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Sie müssen die Theorie des gedämpften harmonischen Oszillators verstanden haben.
2. Machen Sie sich zusätzlich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
   - Erzwungene Schwingung: Amplitude, Phase, Resonanz
3. Bewegungsgleichung:
   - Stellen Sie die Bewegungsgleichung (10) auf und geben Sie ihre physikalische Interpretation an.
   - Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch Addition einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL zur Lösung der entsprechenden homogenen DGL.
   - Geben Sie die physikalische Interpretation der Lösung (20) an.
4. Resonanz:
   - Übernehmen Sie die Abbildung 2 in Ihr Protokollheft und diskutieren Sie die Funktionen. Berechnen Sie insbesondere $B(\omega)$ für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. Was läßt sich über die Kurven für verschiedene Werte von δ (z.B. $\delta = 0$) sagen?
   - Leiten Sie die Beziehungen (21) und (22) für die Resonanzfrequenz und die maximale Amplitude her.
   - Zeigen Sie, dass die Resonanzüberhöhung gegeben ist durch (24).
   - Zeigen Sie, dass die Halbwertsbreite der Resonanzspitze gegeben ist durch (25). Leiten Sie dazu auch die Näherung (27) her.
   - Übernehmen Sie die Abbildung 3 in Ihr Protokollheft und diskutieren Sie die Phase für verschiedene Dämpfungen. Bestimmen Sie insbesondere $\Psi(\omega)$ für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. Was beobachet man bei ω_0 für verschiedene Dämpfungen?

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

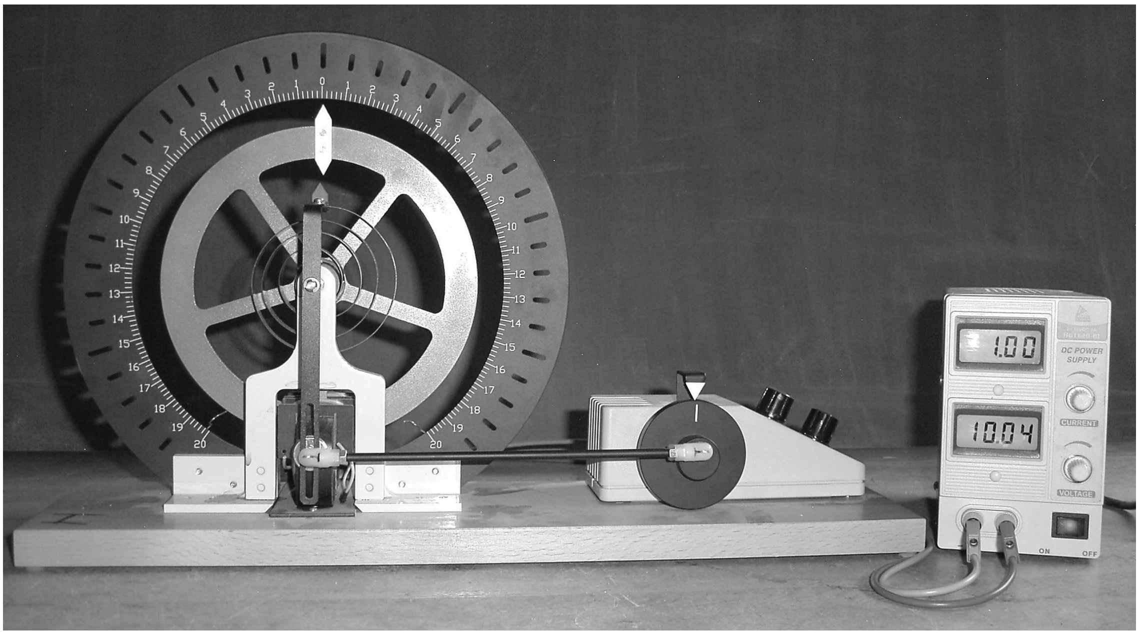

Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch besteht aus einem Drehpendel mit Wirbelstrombremse, einer regelbaren Stromquelle für die Dämpfungsspule und einer Stoppuhr. Zur Anregung der erzwungenen Schwingungen ist im Aufbau auch ein Exzentermotor (mit zugehöriger Stromquelle) integriert. Die Amplitude A wird an der Skala abgelesen, die Umlaufzeit des Motors T_r wird mit der Stoppuhr gemessen. Die Erregerfrequenz wird durch Drehen an den beiden Potentiometern (Grob- und Feineinstellung) verstellt. Achten Sie dabei darauf, dass die Resonanzspitze *sehr* scharf ist. Sie kann nur durch die Feineinstellung genau ermittelt werden.

4 Benötigte Formeln

Aus der Umlaufzeit des Motors T bestimmt man die Erregerfrequenz ω wie folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \ . \tag{1}$$

Für die Halbwerts-Amplitude gilt:

$$B_{\mathrm{H}} = \frac{B_{\mathrm{max}}}{\sqrt{2}} \ . \tag{2}$$

Aus den Frequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Amplitude auf diesen Wert gefallen ist, ergeben sich die Halbwertsbreite H und die Resonanzfrequenz ω_r als:

$$H = \omega_2 - \omega_1 \ , \tag{3}$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\left(\omega_2 + \omega_1\right) \ . \tag{4}$$

Die Resonanzüberhöhung ist für $\delta \ll \omega_0$ gegeben durch:

$$\frac{B_{\mathrm{max}}}{B|_{\omega=0}} = \frac{\omega_0}{2\delta} \ . \tag{5}$$

Man kann die Werte für H und ω_r auch aus den Eigenschaften des Pendels (Dämpfung δ und Eigenfrequenz ω_0) berechnen, die man in Aufgabenteil a) bestimmt hat. Es gilt:

$$H \approx 2\delta \ , \tag{6}$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \ . \tag{7}$$

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 7 dieser Anleitung.

5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte die unteren Punkte nacheinander durchführen:

1. **Eingewöhnung**
   Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten. Beobachten Sie, wie sich Amplitude und Phase bei hohen und niedrigen Anregungsfrequenzen sowie in der Nähe der Resonanz verhalten. Merken Sie sich die ungefähre Lage der Resonanz (also die Einstellung der Potentiometer). Wenn Sie sich hier ein wenig Zeit nehmen, um das Verhalten des Drehpendels qualitativ/intuitiv zu verstehen, können Sie den Versuch wesentlich effizienter durchführen.

2. **Messung**
   Die folgenden Messungen müssen für zwei Dämpfungsstromstärken, bei denen Sie die freie gedämpfte Schwingung (Versuchsteil a)) untersucht haben, durchgeführt werden:

   Nehmen Sie die Resonanzkurve der erzwungenen Schwingung auf:
   Bestimmen Sie dazu die Amplitude der stationären, erzwungenen Schwingung als Funktion der Frequenz des Erregers und zeichnen Sie noch während des Versuchs die Resonanzkurve. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

   - Benutzen Sie dasselbe Drehpendel wie bei Versuchsteil a).
   - Achten Sie darauf, dass das Drehpendel bei der von Ihnen gewählten Stromstärke im Resonanzfall nicht anschlägt.
   - Beide Drehzahlregler sollten möglichst nicht im Anschlag betrieben werden da dort der Motor u.U. unruhig läuft.
   - Beginnen Sie mit Ihren Messungen bei der Resonanzfrequenz und arbeiten Sie sich von dort aus zu kleineren Frequenzen vor. Dann gehen Sie zurück zur Resonanz und arbeiten sich zu größeren Frequenzen vor. Nachdem Sie so die gesamte Resonanzkurve abgedeckt haben versuchen Sie eventuell verbliebene Lücken zu schliessen.
   - *Zeichnen Sie jeden Messwert* sofort *in ein Diagramm ein, damit Sie eine Kontrolle über Ihre Messung haben.* Dadurch erkennen Sie auch, wo noch Messpunkte fehlen.
   - Achten Sie darauf, ausreichend Messwerte (∼10) um den Resonanzpeak herum zu haben (Feineinstellung der Drehzahlregelung benutzen). Wichtig ist vor allem auch, dass Sie eine Messung direkt (möglichst nah) am Resonanzpeak erhalten, damit Sie die Resonanzüberhöhung richtig bestimmen können, und je eine Messung links und rechts des Peaks mit der Amplitude $\frac{B_{max}}{\sqrt{2}}$ um die Halbwertsbreite zu bestimmen. Für den Rest der Kurve genügen einige wenige Messpunkte (3-5 bei hohen und bei sehr niedrigen Frequenzen).

- Achten Sie darauf, dass auch eine Messung für sehr kleines ω vorhanden ist, da sonst die Resonanzüberhöhung nicht vernünftig bestimmt werden kann. Hier liegt übrigens eine der Hauptfehlerquellen des Versuchs.
- Durchführung der Einzelmessungen:
  - Bestimmen Sie zunächst die Erregerfrequenz. Dazu stoppen Sie die Zeit für 10 Motorumdrehungen (*abgelesen am Motor, nicht am Pendel*).
  - Nachdem Sie die Erregerfrequenz bestimmt haben sollte der Einschwingvorgang des Pendels abgeschlossen sein. Bestimmen Sie nun die maximale Amplitude und schätzen Sie deren Fehler (beobachteter Mittelwert während ca. 10 Schwingungen).
  - Bei einigen Drehpendeln treten Schwebungen auf, d.h. die Pendel schwanken bei der stationären Schwingung zwischen Phasen mit sehr kleiner und solchen mit sehr großer Amplitude. Dieses Problem ist leider inhärent in der Versuchsapparatur. Lesen Sie in diesem Fall immer die Amplitude im Maximalausschlag ab.

6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung.*

1. **Zeichnen Sie für beide Stromstärken die Resonanzkurven.**
   Vervollständigen Sie also ihre Diagramme aus der Versuchsdurchführung. Falls noch nicht geschehen, tragen sie Fehlerbalken, Achsenbeschriftung, Diagrammtitel etc. nach. Zeichnen Sie eine physikalisch sinnvolle Ausgleichskurve ein.

2. **Bestimmen Sie aus den beiden Resonanzkurven die Halbwertsbreite H, die Resonanzfrequenz ω_r, sowie die Amplituden $B(\omega)$ bei ω_r und bei $\omega \to 0$.**
   Lesen Sie diese Werte aus den Diagrammen ab und schätzen Sie ihre Fehler ab. Achten Sie darauf, dass mit „Halbwert " die Hälfte des Amplitudenquadrates, also der Intensität gemeint ist. Da Sie die Amplitude gegen die Frequenz aufgetragen haben, müssen Sie die Frequenzen ω_1 und ω_2 ablesen, bei denen die Amplitude auf $B = \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\max}$ gesunken ist.

3. **Bestimmen Sie die Dämpfungskonstanten δ und die Eigenfrequenz ω_0:**
   Berechnen Sie δ aus den abgelesenen Halbwertsbreiten. Anschließend bestimmen Sie aus der abgelesenen Resonanzüberhöhung und der Halbwertsbreite die Eigenfrequenz ω_0.

4. **Bestimmen Sie die Halbwertsbreite H und die Resonanzfrequenz ω_r aus ihren Ergebnissen für Versuchsteil a):**
   Berechnen Sie ω_r und H aus den Werten von δ und ω_0, die Sie für die entsprechenden Stromstärken in Versuchsteil a bestimmt haben.

5. **Vergleichen Sie die Ergebinsse der Versuchsteile a) und b).**
   Fassen sie dazu ihre Ergebnisse für ω_r, ω_0, H und δ, die Sie aus den Versuchsteilen a) und b) unabhängig ermittelt haben **tabellarisch** zusammen.

6. **Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.**
   Sehen die Resonanzkurven aus wie erwartet? Wie fällt der Vergleich zwischen den Werten aus Versuchsteil a) und b) aus? Welche Methode für die Bestimmung von δ, ω_0 und ω_r ist die genauere? Warum? Wo liegen die wichtigsten Fehlerquellen? Warum ist es so wichtig die Resonanzüberhöhung richtig zu bestimmen? Vergleichen Sie außerdem die erwartete Dauer des Einschwingvorgangs ($2 - 3n_e$ Schwingungen) mit der Zeit, die vor Ihrer Amplituden-Messung vergangen ist (ca. 10 Schwingungen). War diese Zeit ausreichend?

7 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

7.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators sowie dessen Lösung sind Ihnen aus Teil a) bekannt:

$$I\ddot{\varphi}(t) + D\varphi(t) + k\dot{\varphi}(t) = 0 \tag{8}$$

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_f t + \alpha) \tag{9}$$

Die konstante Phase α hängt von der Wahl der Anfangsbedingungen ab. Für die Frequenz des gedämpften harmonischen Oszillators ω_f gilt: $\omega_f^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Dabei ist ω_0 die Eigenfrequenz des ungedämpften Drehpendels und $\delta < \omega_0$.

Die erzwungene Schwingung des Drehpendels wird im Versuch durch einen Exzentermotor bewirkt. Daher muss in Gleichung (8) auf der rechten Seite das periodische Drehmoment M mit der Kreisfrequenz ω des Exzentermotors stehen:

$$I\ddot{\varphi}(t) + D\varphi(t) + k\dot{\varphi}(t) = M\cos(\omega t) \tag{10}$$

Nach der Theorie der Differentialgleichungen erhält man die Lösung dieser *inhomogenen* Differentialgleichung, indem man zur Lösung (9) der entsprechenden *homogenen* Differentialgleichung (8) *eine* spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10) addiert.

Da aus der Lösung (9) der homogenen Gleichung (8) hervorgeht, dass die Schwingung ohne äußeres Drehmoment exponentiell abklingt, erscheint es als vernünftige Annahme, dass das Drehpendel nach einer gewissen Zeit mit der Kreisfrequenz des Exzentermotors schwingt, d.h. eine mögliche Lösung könnte sein:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\omega t} \tag{11}$$

Hierbei ist φ_0 eine komplexe Konstante. Gleichung (10) wird der einfacheren mathematischen Behandlung halber ebenfalls in komplexer Form geschrieben:

$$I\ddot{\varphi}(t) + D\varphi(t) + k\dot{\varphi}(t) = Me^{i\omega t} \tag{12}$$

Wir teilen Gleichung (12) durch I, setzen $\omega_0^2 = \frac{D}{I}$ und $\delta = \frac{k}{2I}$ und erhalten nach Einsetzen des Lösungsansatzes (11):

$$\varphi_0(-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\delta\omega) = \frac{M}{I} \tag{13}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\delta\omega} \\
&= \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega} \\
&= \frac{M}{I} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Die komplexe Amplitude (14) kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= |\varphi_0|e^{-i\psi} = (\varphi_0\varphi_0^*)^{1/2} \cdot e^{-i\psi} \\
&= \frac{M}{I} \cdot \frac{\sqrt{[(\omega_0^2-\omega^2)-2i\delta\omega]\cdot[(\omega_0^2-\omega^2)+2i\delta\omega]}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2} \cdot e^{-i\psi} \\
&= \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \cdot e^{-i\psi} \qquad (15) \\
&= \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+2\delta\omega)^2}} \cdot (\cos\psi - i\sin\psi) \qquad (16)
\end{aligned}$$

Aus (15) folgt also für die *partikuläre* Lösung $\varphi(t)$ der *inhomogenen* Differentialgleichung (10):

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\omega t} = |\varphi_0|e^{-i\psi}e^{i\omega t} = \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \cdot e^{i(\omega t-\psi)} \qquad (17)$$

Der Realteil dieser Gleichung und damit eine physikalisch sinnvolle partikuläre Lösung ist dann:

$$\begin{aligned}
\varphi_{Re}(t) &= B(\omega)\cos(\omega t+\psi) \qquad (18) \\
\text{mit} \quad B(\omega) &= \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \qquad (19)
\end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen eines gedämpften harmonischen Oszillators ergibt sich, indem man die partikuläre Lösung (18) zur Lösung (9) der homogenen Differentialgleichung addiert:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_f t+\alpha) + B(\omega)\cos(\omega t+\psi) \qquad (20)$$

Im Versuch untersuchen Sie die Abhängigkeit der Amplitude $B(\omega)$ von der Erregerfrequenz ω. Da $B(\omega)$ nach (19) von der Dämpfung δ und der Eigenfrequenz ω_0 abhängt, können diese beiden Werte ermittelt werden und mit den Werten aus Versuchsteil a) verglichen werden.

Das theoretisch erwartete Verhalten der Phase und der Amplitude wird im Folgenden besprochen. Wir betrachten hierbei nur den rechten Summanden in (20), d.h. wir betrachten nur das Verhalten des Pendels nach dem Einschwingvorgang.

7.2 Verhalten der Amplitude $B(\omega)$

Abb. 2 zeigt den Verlauf der Amplitude $B(\omega)$ in Abhängigkeit von ω.

Um das Maximum der Amplitude $B(\omega)$ der erzwungenen Schwingung zu finden, muss

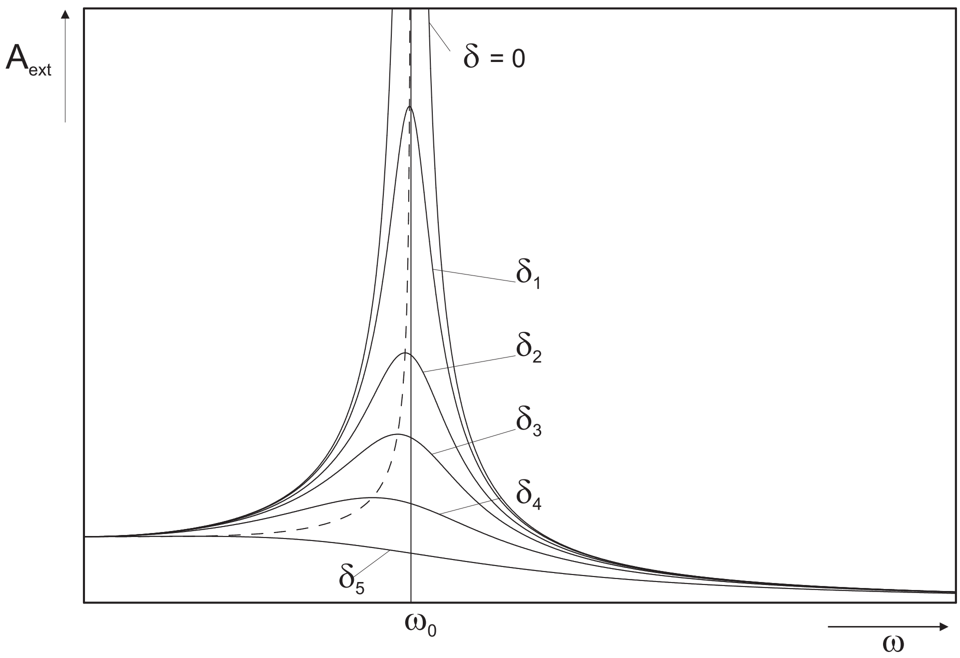

Abbildung 2: Abhängigkeit der Amplitude des Oszillators von der Frequenz der erzwungenen Schwingung. In der Abbildung gilt $\delta_j > \delta_k$ für $j > k$. Die gestrichelte Kurve gibt die Lage der Maxima an.

das Extremum von Gleichung (19) gesucht werden. Aus $B'(\omega) = 0$ ergibt sich, dass die maximale Amplitude bei der *Resonanzfrequenz* ω_r auftritt:

$$\omega_\mathrm{r} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{21}$$

Der Wert der maximalen Amplitude ist:

$$B_\mathrm{max}(\omega_\mathrm{r}) = \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \tag{22}$$

Der Verlauf von $B_\mathrm{max}(\omega_\mathrm{r})$ ist in Abb. 2 als gestrichelte Linie eingezeichnet, die die Maxima der Resonanzkurven miteinander verbindet. Ein wichtiges Merkmal der Resonanz ist, dass *die Größe der Resonanzamplitude nicht nur von der extern einwirkenden Kraft bzw. dem extern einwirkenden Drehmoment, sondern auch von der Dämpfung des Systems abhängt.* Das heißt, dass ungedämpfte oder sehr gering gedämpfte Systeme, die durch große und scharfe Resonanzspitzen charakterisiert sind, mit geringem Aufwand in die *Resonanzkatastrophe* getrieben und damit zerstört werden können. Daher ist es in der Technik unerlässlich, Objekte durch ausreichende Dämpfung davor zu schützen. Brücken können z.B. durch Wind zum Schwingen angeregt werden, Gebäude durch Erdbeben.

Wenn $\delta \ll \omega_0$, dann vereinfacht sich Gleichung (22) zu

$$B_{\max}(\omega_\mathrm{r}) \approx \frac{M}{I}\frac{1}{2\delta\omega_0} = \frac{M}{D}\frac{\omega_0}{2\delta} \tag{23}$$

Für die *Resonanzüberhöhung* gilt:

$$\frac{B_{\max}(\omega = \omega_\mathrm{R})}{B(\omega = 0)} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{24}$$

Die *Halbwertsbreite* der Resonanzspitze ist gegeben durch:

$$H = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\delta. \tag{25}$$

ω_1 und ω_2 sind hierbei die Frequenzen, bei denen das *Amplitudenquadrat* den halben Maximalwert annimmt. Gleichung (25) folgt dann bei geringer Dämpfung $\delta \ll \omega_0$ aus dem Ansatz

$$\left(\frac{M}{I}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} \approx \left(\frac{M}{I}\right)^2 \frac{1}{2(2\delta\omega_0)^2} \tag{26}$$

unter Verwendung der Näherung

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \approx (\omega_2 - \omega_1)2\omega_0. \tag{27}$$

Bei geringer Dämpfung lassen sich Resonanzüberhöhung und Halbwertsbreite leicht aus der Resonanzkurve ablesen. Damit lassen sich sowohl die Eigenfrequenz ω_0 als auch die Dämpfung δ aus der Resonanzkurve ermitteln.

7.3 Verhalten der Phase

Die Phase ψ kann aus dem Realteil und Imaginärteil der komplexen Amplitude abgeleitet werden. Aus einem Vergleich der Gleichungen (14) und (16) ergibt sich:

$$\cot\psi = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{\mathrm{Re}(\varphi_0)}{\mathrm{Im}(\varphi_0)} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega} \tag{28}$$

Also

$$\psi = \operatorname{arccot}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right) \tag{29}$$

Abb. 3 zeigt den Verlauf der Phase ψ in Abhängigkeit von ω.

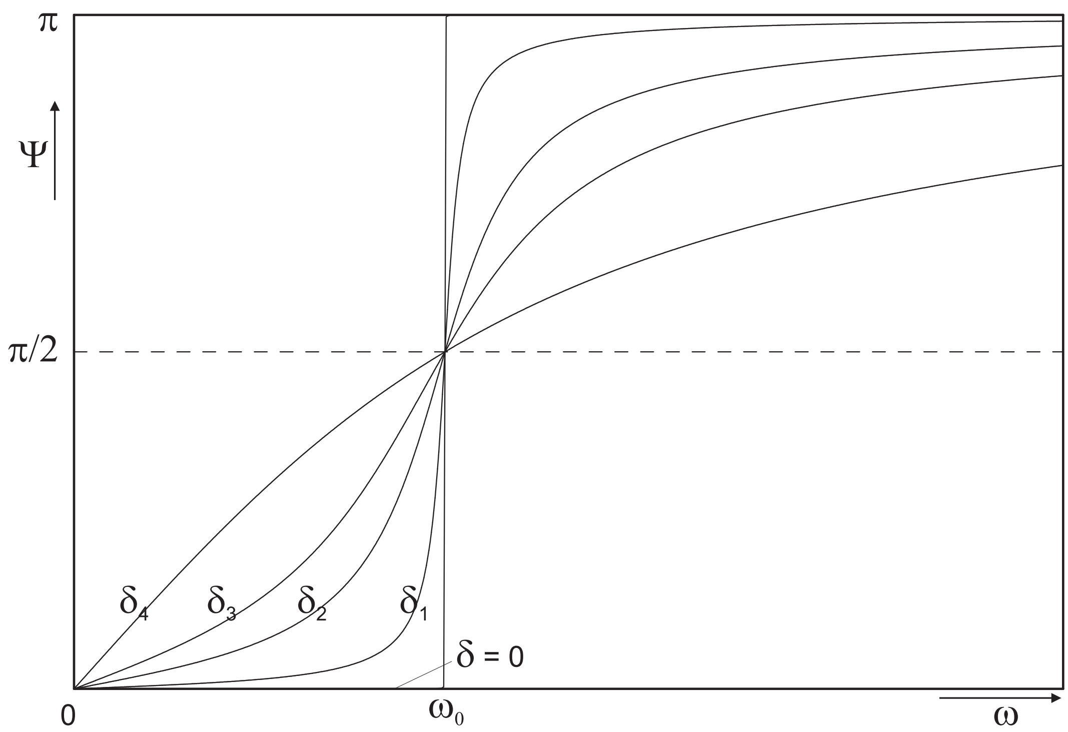

Abbildung 3: Abhängigkeit der Phase des Oszillators von der Frequenz der erzwungenen Schwingung. In der Abbildung gilt $\delta_j > \delta k$ für $j > k$.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  `http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/`
  `http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf`
- Budo, A.: Theoretische Mechanik
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner

9 Sicherheitshinweise

Dieser Versuchsaufbau enthält zwei Netzteile, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.
Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.