

# Versuch M3a für Nebenfächler Gedämpfter harmonischer Oszillator

I. Physikalisches Institut, Raum HS102  
Stand: 23. Juni 2014



## generelle Bemerkungen

- bitte Versuchsaufbau (Nummer) angeben
- bitte Versuchspartner angeben
- bitte Versuchsbetreuer angeben
- bitte nur handschriftliche Auswertung

# 1 Einleitung

Der harmonische Oszillator ist ein Phänomen, das in der Physik an vielen Stellen behandelt wird. Er taucht aber auch in den anderen Naturwissenschaften und der Technik immer wieder auf. Ein grundlegendes Beispiel hierfür sind die Verbindungen von mehreren Atomen zu Molekülen oder Festkörpern. Sie sind immer elastisch und daher als harmonische Oszillatoren zu behandeln. Aber auch auf deutlich größeren Skalen spielen Schwingungen eine Rolle, zum Beispiel bei Erdbeben oder der wind- und stoßsicheren Konstruktion von Gebäuden und Brücken oder bei der Entwicklung von Stoßdämpfern. Daher ist es von großer Bedeutung mit dem Verhalten schwingender Systeme unter verschiedensten Bedingungen vertraut zu sein und grundlegende mathematische Lösungsansätze zu kennen.

## 2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
  - Allgemeine Begriffe: Trägheitsmoment, Amplitude, Schwingungsdauer, Eigenfrequenz, Fehlerfortpflanzung
  - Wirbelstrombremse, Lorentzkraft, Lenz'sche Regel
  - Harmonischer Oszillator, Hook'sches Gesetz, freie ungedämpfte Schwingung, freie gedämpfte Schwingung, Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall
2. Freie ungedämpfte Schwingung:
  - Stellen Sie die Bewegungsgleichung (6) auf und geben Sie ihre physikalische Interpretation an.
  - Zeigen Sie, dass die Funktion in (7) diese Bewegungsgleichung löst.
  - Interpretieren Sie diese Lösung und die gewählten Anfangsbedingungen physikalisch.
3. Freie gedämpfte Schwingung:
  - Stellen Sie die Bewegungsgleichung (10) auf und geben Sie ihre physikalische Interpretation an.
  - Zeigen Sie, dass die Funktionen in (16), (19) und (21) diese Bewegungsgleichung lösen. Das heißt, setzen Sie die jeweilige Funktion in die Bewegungsgleichung ein und zeigen Sie, dass in der Summe Null herauskommt.
  - Interpretieren Sie diese Lösungen physikalisch.

- Zeichnen Sie dazu für alle drei Fälle die Graphen für  $\varphi(t)$  und verdeutlichen Sie an Ihrer Zeichnung die Unterschiede zwischen den verschiedenen Fällen.
- Nach welcher Zeit  $t$  ist die Schwingungsamplitude  $Ae^{-\delta t}$  auf den Bruchteil  $e^{-1}$  der Anfangsamplitude zurückgegangen? Wann auf  $e^{-4}$ ? Wann auf  $1/2$ ?
- Leiten Sie für die Dämpfung die Beziehung (4) her.

### 3 Versuchsaufbau und -beschreibung

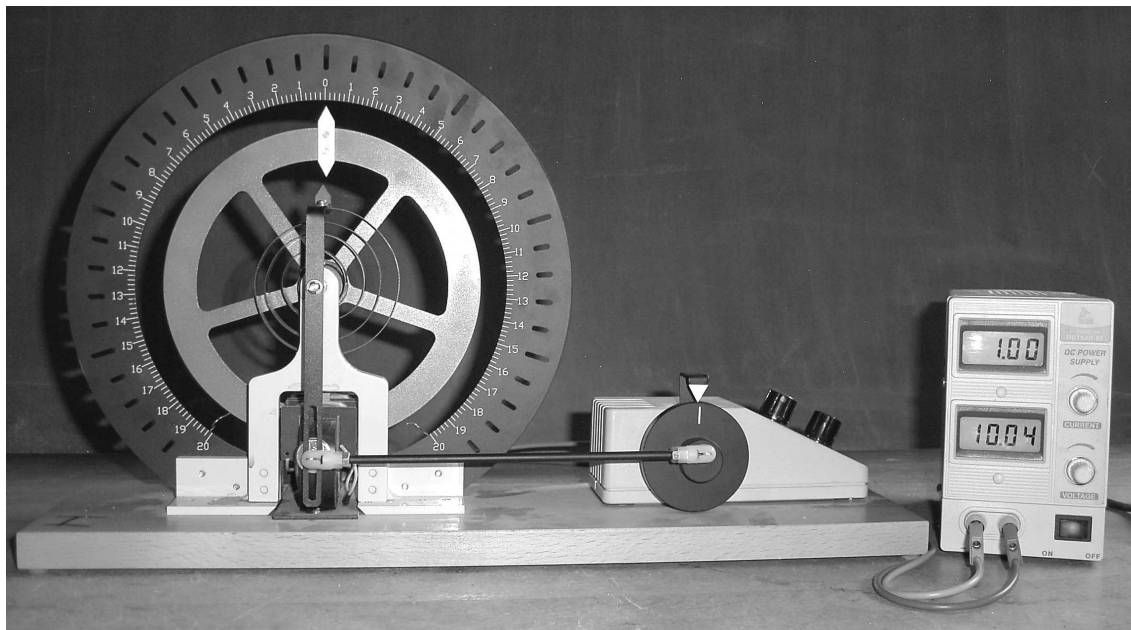


Abbildung 1: Foto des Versuchsaufbaus

Der Versuch besteht aus einem Drehpendel mit Wirbelstrombremse, einer regelbaren Stromquelle für die Dämpfungsspule und einer Stoppuhr. Zusätzlich ist im Aufbau auch ein Exzentermotor (mit zugehöriger Stromquelle) integriert. Dieser wird aber nur für den Versuch M3b benötigt.

Die Amplitude  $A$  wird an der Skala abgelesen, die Schwingungsdauer  $T_f$  wird mit der Stoppuhr gemessen.

## 4 Benötigte Formeln

### 4.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Für einen völlig reibungsfreien Versuchsaufbau würde sich die Schwingungsdauer des Drehpendels  $T_0$  aus der Eigenfrequenz  $\omega_0$  (Kreisfrequenz!) des Pendels ergeben. Dabei gilt:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (1)$$

### 4.2 Die freie gedämpfte Schwingung

In der Realität hat man es aber nie mit einem völlig ungedämpften System zu tun (auch nicht, wenn die Dämpfungsspule noch ausgeschaltet ist). Die resultierende Schwingungsdauer  $T_f$  des gedämpften Pendels ergibt sich aus der zugehörigen Kreisfrequenz  $\omega_f$ , welche mit der Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels und der Dämpfung  $\delta$  wie folgt zusammenhängt:

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \quad (2)$$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}. \quad (3)$$

Die Dämpfung kann man aus der Schwingungsdauer des gedämpften Pendels und der Anzahl  $n_e$  der Schwingungen nach denen die Amplitude sich um den Faktor  $e^{-1}$  verringert hat berechnen:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f}. \quad (4)$$

Im sogenannten aperiodischen Grenzfall gilt:

$$\omega_0 = \delta. \quad (5)$$

Hinweise zur Herleitung finden sich in Abschnitt 7 dieser Anleitung.

## 5 Durchführung (im Praktikum)

Bitte führen Sie die nachfolgenden Punkte nacheinander durch:

### 1. Eingewöhnung

Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten. Zeichnen Sie eine Versuchsskizze inklusive des Schaltbildes in Ihr Protokollheft. Überprüfen Sie zunächst die Nullstellung der Winkelskala. Die Nullstellung kann durch *vorsichtiges* Drehen des Exzentermotors erreicht werden.

### 2. Messung

Die folgenden Messungen müssen für sechs verschiedene Dämpfungsstromstärken  $j$  durchgeführt werden. Beginnen Sie mit  $j = 0$  A und wählen Sie dann fünf weitere Stromstärken mit  $0,3 \text{ A} \leq j \leq 0,75 \text{ A}$ .

#### (a) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer $T_f$

Regen Sie zunächst eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an:  $A > 18$  Skalenteile (Skt). Messen Sie dann mit der Stoppuhr die Zeit für maximal 20 Schwingungen oder bis die Amplitude auf ca. 0.4 Skt abgeklungen ist.

#### (b) Bestimmung Sie die Dämpfung $\delta$

Regen Sie zunächst wieder eine Schwingung mit möglichst großer Anfangsamplitude an. Messen Sie den Maximalausschlag nach jeder *vollen* Periode und zwar bis die Schwingung auf ca. 0.4–0.6 Skt abgeklungen ist bzw. - bei geringen Dämpfungen - maximal für 25 Perioden. Ein Partner führt die Messung durch und diktiert die abgelesenen Werte, der andere protokolliert diese. Schätzen Sie den Ablesefehler.

## 6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

- 1. Bestimmen Sie für alle sechs Stromstärken die Frequenzen  $\omega_f$ .**  
Berechnen Sie dazu zunächst aus den gemessenen Zeiten für  $n$  Schwingungen die Schwingungsdauer  $T_f$ .
- 2. Ermitteln Sie für alle sechs Stromstärken die Dämpfungskonstanten  $\delta$ .**  
Tragen Sie dazu in sechs Diagrammen  $\ln A$  gegen  $n$  auf und ermitteln Sie daraus jeweils den Wert für  $n_e$ , indem Sie durch graphische Geradenanpassung die Steigungen der Geraden bestimmen. Aus dem negativen Kehrwert der Steigung erhalten Sie dann  $n_e$ . Bitte erläutern Sie, warum das so ist - d.h., wie die Abnahme der Amplitude mit der Zeit mit der logarithmischen Auftragung der Amplitude gegen die Schwingungsanzahl zusammenhängt. Berechnen Sie danach die Dämpfungskonstanten gemäß Gleichung (4).
- 3. Überprüfen Sie in einem Diagramm den Zusammenhang  $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .**  
Tragen Sie dazu  $\omega_f^2$  gegen  $\delta^2$  auf. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch. Die Steigung der Geraden dient dazu, den genannten Zusammenhang zu überprüfen, aus dem Achsenabschnitt bestimmen Sie die Eigenfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems.
- 4. Stellen Sie in einem Diagramm den Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstanten  $\delta$  und dem Spulenstrom  $j$  dar.**  
Tragen Sie dazu  $\delta$  gegen  $j^2$  auf. Führen Sie auch hier eine graphische Geradenanpassung durch.
- 5. Welcher Spulenstrom muss eingestellt werden, damit der aperiodische Grenzfall eintritt?**  
Ermitteln Sie diesen Wert mithilfe der Geradengleichungen zu den Diagrammen  $\omega_f^2(\delta^2)$  und  $\delta(j^2)$ .
- 6. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.**  
Entsprechen die Verläufe der Diagramme Ihren Erwartungen? Konnten Sie den Zusammenhang  $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  bestätigen? Liegt der Dämpfungsstrom, bei dem der aperiodische Grenzfall eintreten soll in einem realistischen Bereich? Welche Fehlerquellen gibt es in diesem Versuch?

## 7 Anhang: Hinweise zur Herleitung der Formeln

### 7.1 Die freie ungedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung einer freien ungedämpften harmonischen Schwingung lautet:

$$I\ddot{\varphi}(t) = -D\varphi(t) , \quad (6)$$

t	=	Zeit
$\varphi$	=	Winkelausschlag des Drehpendels
I	=	Trägheitsmoment
D	=	Richtkonstante der rücktreibenden Spiralfeder

Hierbei handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Grades. Die allgemeine Lösung dieser DGL erhält man durch Linearkombination zweier linear unabhängiger Funktionen des fundamentalen Lösungssystems. Dabei muss die Lösung der Bewegungsgleichung  $\varphi(t)$  so beschaffen sein, dass sie bis auf konstante Faktoren mit ihrer zweiten Ableitung  $\ddot{\varphi}(t)$  übereinstimmt. Diese Bedingung wird von den Kreisfunktionen  $\sin$  und  $\cos$  erfüllt und motiviert den Ansatz:

$$\varphi(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t) . \quad (7)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (6) liefert:

$$-I\omega_0^2 \varphi(t) + D\varphi(t) = 0 ,$$

wobei offensichtlich gilt:

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{D}{I}} . \quad (8)$$

Wählt man nun die speziellen Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = A$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , so erhält man die Lösung:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \cos(\omega_0 t) , \\ A &= \text{Anfangsamplitude} , \\ T_0 &= \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{Schwingungsdauer}) . \end{aligned} \quad (9)$$

Die Größe  $\omega_0$  wird auch als *Eigenfrequenz* des ungedämpften harmonischen Oszillators bezeichnet.

### 7.2 Die freie gedämpfte Schwingung

Im Fall der freien gedämpften Schwingung lautet die Bewegungsgleichung:

$$I\ddot{\varphi}(t) = -D\varphi(t) - k\dot{\varphi}(t) . \quad (10)$$

Hierbei ist  $k$  die Reibungskonstante und im vorliegenden Fall hauptsächlich abhängig vom Spulenstrom  $j$ . Die Reibung wird durch Wirbelströme erzeugt, wenn sich der Kupfering im Magnetfeld der Gleichstromspule bewegt. Weitere Effekte wie Luftreibung etc. tragen nur geringfügig zur Gesamtreibung bei.

Die Bewegungsgleichung ist wieder eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Grades für  $\varphi(t)$ . Um sie zu lösen wählt man den sogenannten Exponentialansatz:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{\lambda t}, \quad (11)$$

mit  $A \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ . Einsetzen in die Bewegungsgleichung (10) führt zu:

$$0 = I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + D\varphi \quad (12)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\delta \pm i\omega_f, \quad (13)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{k}{2I} \quad (\text{Dämpfung}), \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{D}{I}}, \\ \omega_f &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

Für  $\omega_f$  gibt es nun folgende Möglichkeiten:

$\omega_0^2 - \delta^2 > 0 \rightarrow \omega_f$ ist reell	<b>Schwingfall</b>
$\omega_0^2 - \delta^2 = 0 \rightarrow \omega_f = 0$	<b>Aperiodischer Grenzfall</b>
$\omega_0^2 - \delta^2 < 0 \rightarrow \omega_f$ ist rein komplex	<b>Kriechfall</b>

Sie führen zu qualitativ unterschiedlichen Lösungen für  $\varphi(t)$ . Auf diese wollen wir im Folgenden kurz eingehen.



### 7.2.1 Schwingfall

Hier gilt  $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$ , also ist  $\omega_f$  eine reelle Zahl. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man (vgl. Abb. 2):

$$\varphi(t) = a \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega_f t) + b \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega_f t) , \quad (15)$$

Für die Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = A$  und  $\dot{\varphi}(0) = -\delta A$  ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_f t) . \quad (16)$$

$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$  ist die Schwingungsdauer der freien gedämpften Schwingung. Die cos-Funktion beschreibt die Oszillation, die e-Funktion das Abklingen und das schließliche Verlöschen der Amplitude.

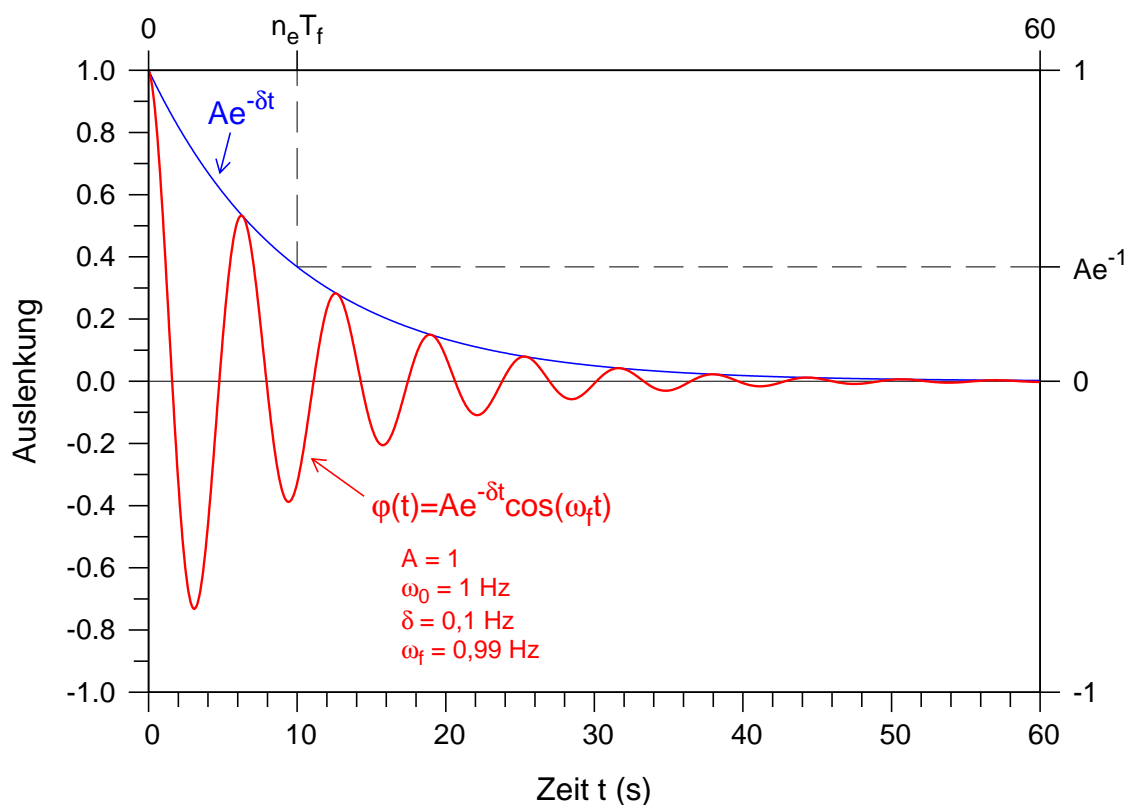


Abbildung 2: Abnahme der Amplitude mit der Zeit im Schwingfall

Man wundert sich hier vielleicht über die Wahl der Anfangsbedingungen. Intuitiver wäre sicherlich die Annahme, dass das Pendel ausgelenkt und losgelassen wird, also keine Anfangsgeschwindigkeit hat. Im Gegensatz zur ungedämpften Schwingung würden solche Anfangsbedingungen hier aber nicht zu einer Kosinusförmigen Bewegung führen, sondern man erhielte auch einen geringen Sinusbeitrag. Um den Rechenaufwand geringer zu halten

empfehl es sich bei der gedämpften Schwingung, den Zeitpunkt  $t = 0$  so zu wählen, dass nur der Kosinusterm übrig bleibt. Das bedeutet, man wählt den Zeitpunkt als Anfang, an dem die Kurve der gedämpften Schwingung die einhüllende Exponentialfunktion berührt. Dies geschieht, wie man an Abbildung 2 sehen kann, nicht im Umkehrpunkt des Pendels, sondern ein bisschen rechts davon. Es muss also eine Anfangsgeschwindigkeit angenommen werden.

Im Versuch soll hauptsächlich der Schwingfall untersucht werden.

Man kann zeigen, dass für die Dämpfung gilt:

$$\delta = \frac{1}{n_e T_f} \quad (17)$$

Bei der Größe  $n_e$  handelt es sich um die Anzahl der Schwingungen, nach denen die Amplitude von  $A$  auf  $A/e$  abgenommen hat.

### 7.2.2 Aperiodischer Grenzfall

Hier gilt  $\omega_f = 0$ . Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = (a + bt) \cdot e^{-\delta t} . \quad (18)$$

Für die Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = A$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = A(1 + \delta t) \cdot e^{-\delta t} . \quad (19)$$

### 7.2.3 Kriechfall

Hier gilt  $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$ , also ist  $\omega_f$  eine rein komplexe Zahl,  $i \cdot \omega_f = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  dagegen ist reell. Als Lösung für die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\varphi(t) = a \cdot e^{(-\delta + i\omega_f)t} + b \cdot e^{(-\delta - i\omega_f)t} . \quad (20)$$

Für die Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = A$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  ergibt sich damit die Lösung:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \left( \cosh(i\omega_f t) + \frac{\delta}{i\omega_f} \sinh(i\omega_f t) \right) . \quad (21)$$

Abbildung 3 zeigt einen Vergleich aller drei Fälle.

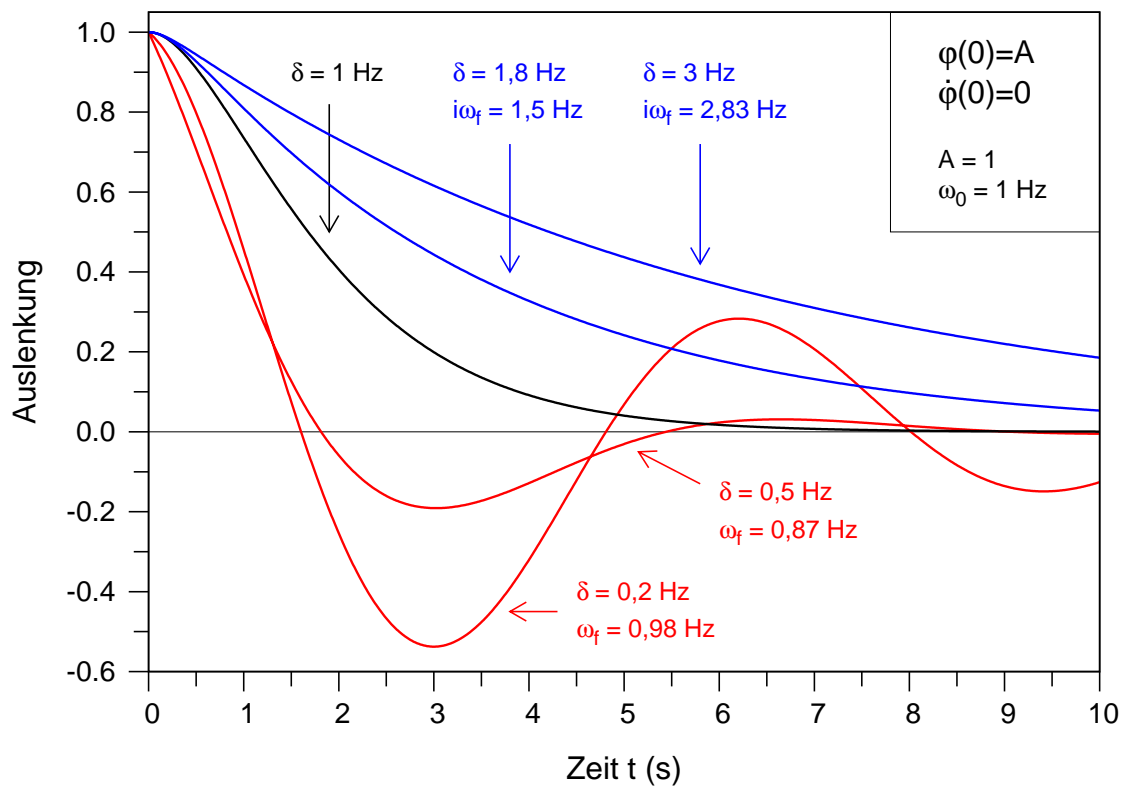


Abbildung 3: Verhalten des gleichen harmonischen Oszillators für unterschiedliche Dämpfungen: rot: Schwingfall, schwarz: Aperiodischer Grenzfall, blau: Kriechfall

## 8 Literatur

- Fehlerrechnung:  
[http://www.astro.uni-koeln.de/teaching\\_seminars/AP/](http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/)  
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- Budo, A.: Theoretische Mechanik
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/springer\\_links/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html)
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/springer\\_links/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html)
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner

## 9 Sicherheitshinweise

Dieser Versuchsaufbau enthält zwei Netzteile, es gelten also die üblichen Verhaltensregeln für den Umgang mit Strom.

Informieren Sie bei Defekten an Bestandteilen des Aufbaus Ihren Betreuer und versuchen Sie nicht selbst Teile zu demontieren.