

# Versuch M1 für Physiker mathematisches Pendel

I. Physikalisches Institut, Raum HS126  
Stand: 19. April 2016



## generelle Bemerkungen

- bitte Versuchsaufbau (rechts, mitte, links) angeben
- bitte Versuchspartner angeben
- bitte Versuchsbetreuer angeben
- bitte nur handschriftliche Auswertung

## 1 Einleitung

Schwingungsprozesse spielen in der gesamten Physik eine wichtige Rolle. In diesem Versuch soll die Pendelschwingung kennengelernt werden und über ihre Gesetzmäßigkeit die Erdbeschleunigung  $g$  bestimmt werden. Durch die genaue Berücksichtigung der systematischen und statistischen Fehler soll der Wert von  $g$  möglichst genau eingegrenzt werden.

## 2 Vorbereitung (zu Hause)

Die folgenden Stichpunkte und theoretischen Überlegungen sollen in Ihrem Heft schriftlich bearbeitet werden. Außerdem sollten Sie in der Lage sein, sie am Versuchstag im Antestat selbstständig wiederzugeben. Weitere Hinweise zum Vorgehen bei den Herleitungen finden Sie in Abschnitt 7. Literaturhinweise gibt es in Abschnitt 8.

1. Machen Sie sich mit folgenden Begriffen und Gesetzmäßigkeiten vertraut:
  - Allgemeine Begriffe: Impuls, Drehimpuls, kinetische Energie, potentielle Energie, Rotationsenergie, Trägheitsmoment, Fehlerfortpflanzung
  - Mathematisches Pendel, Kräftezerlegung (am Pendel), Gravitation, Erdbeschleunigung, harmonischer Oszillator (Bewegungsgleichung, harmonische Schwingung, gedämpfte Schwingung).
2. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für ein mathematisches Pendel auf und leiten Sie so Formeln (2) und (3) aus Abschnitt 4 her.
3. Leiten Sie mittels Gauss'scher Fehlerfortpflanzung Formel (4) her.
4. Machen Sie sich mit den im Anhang beschriebenen Korrekturtermen vertraut.

### 3 Versuchsaufbau und -beschreibung

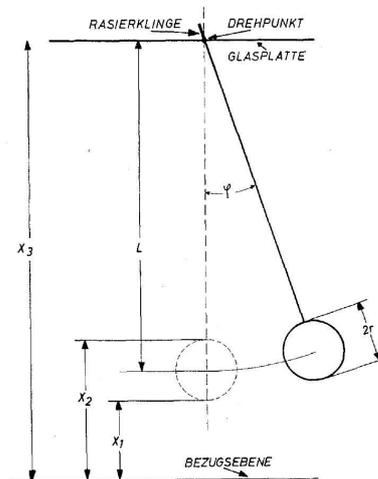


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus

Eine Metallkugel der Masse  $m_K$  ist an einem dünnen Stahldraht mit Durchmesser  $\varnothing = 0,1 \text{ mm}$  frei schwingend aufgehängt. Um die Reibung zu minimieren, ist die Aufhängung durch eine Rasierklinge auf einer Glasplatte realisiert.

Die Pendellänge  $L$  (Aufhängepunkt – Kugelmittelpunkt) wird mit einem sog. Kathetometer gemessen, die Periodendauer  $T_0$  mit einer Stoppuhr.

## 4 Benötigte Formeln

### 4.1 Idealisertes mathematisches Pendel

Die folgenden Formeln gelten für einen idealisierten Versuch (Massepunkt, kleine Auslenkung, kein Luftauftrieb, keine Reibungskräfte). Die Bewegungsgleichung für diesen Fall und die Approximation für kleine Auslenkungen ( $\sin \phi \approx \phi$ ) führt auf die Formel für die Kreisfrequenz  $\omega_0$  und die Schwingungsdauer  $T_0$  bzw. die Erdbeschleunigung  $g$ :

$$\omega_0^2 = g/L \quad (1)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \quad (2)$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \quad (3)$$

Der relative Fehler der Erdbeschleunigung ist dann

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)^2}. \quad (4)$$

### 4.2 Reales mathematisches Pendel

Möchte man die systematischen Fehler (ausgedehnte Massen, große Auslenkungen, Luftauftrieb der Kugel, Reibungskräfte) mitberücksichtigen, so müssen folgende Korrekturterme herangezogen werden,

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_{Mess}^2} \left( 1 + \underbrace{\frac{2r^2}{5L^2} - \frac{m_F}{6m_K}}_{\text{ausged. Massen}} + \underbrace{\frac{\phi_{max}^2}{8}}_{\text{Auslenkung}} + \underbrace{\frac{\rho_L}{\rho_K}}_{\text{Auftrieb}} + \underbrace{\frac{\delta^2}{\omega_0^2}}_{\text{Dämpfung}} \right) \quad (5)$$

wobei  $r$  der Radius der Kugel ist,  $m_F$  die Masse des Stahlfadens,  $\phi_{max}$  die mittlere maximale Auslenkung der Kugel (in Radians),  $\rho_L$  die Dichte der Luft, und  $\delta$  die Dämpfung. Eine genaue Herleitung findet sich im Anhang dieser Anleitung.

## 5 Durchführung (im Praktikum)

Bearbeiten Sie zunächst die Aufgaben 1 und 2 nacheinander, dann führen Sie die Messungen zu 3 und 4 gleichzeitig durch.

### 1. Eingewöhnung

Spielen Sie mit der Versuchsanordnung, wobei Sie sich mit der Beobachtungstechnik vertraut machen und Fehlerquellen erkennen sollten. Überzeugen Sie sich qualitativ davon, dass (siehe Gleichung (7) im Anhang) die Periodendauer  $T$  mit der Auslenkung ansteigt.

### 2. Messen Sie die Pendellänge $L$

Die Pendellänge  $L$  messen Sie mit dem Kathetometer.

**Das Kathetometer ist ein sehr empfindliches Messgerät! Betätigen Sie die Verstellschrauben bitte gefühlvoll und wenden Sie am Endanschlag der Schrauben keine Gewalt an!** Wenn sich die Rollen des Tisches mit dem Kathetometer auf den weiß markierten Rollbahnen des Fußbodens befinden sollte der richtige Fokus der Optik ungefähr in der Mitte des Verstellbereichs zu finden sein.

Das Kathetometer muss vor der Messung justiert (Wasserwaage) und während der Messung vor Störungen bewahrt werden. Sie lesen mit ihm 5 mal - jedesmal in der gleichen Reihenfolge - die folgenden Höhen ab: Höhe der Unterkante der Kugel ( $x_1$ ), Höhe der Oberkante der Kugel ( $x_2$ ), Aufhängung des Pendels ( $x_3$ ) (vgl. Skizze). Schreiben Sie alle gemessenen Zahlen in Tabellenform unmittelbar ins Protokollheft.

	$x_1[cm]$	$x_2[cm]$	$x_3[cm]$
1			
2			
3			
4			
5			

### 3. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer $T$

Die Periodendauer wird mit einer gewöhnlichen Stoppuhr gemessen. Messen Sie probeweise mehrmals die Periodendauer und vergleichen Sie ihre Werte. Der wesentliche Fehler bei solch einer Zeitmessung wird durch die Reaktion beim Starten (ca. 0,1 s) und beim Stoppen (ca. 0,1 s) verursacht, also zusammen etwa

$$\Delta T = \sqrt{(0,1 \text{ s})^2 + (0,1 \text{ s})^2} = 0,14 \text{ s} .$$

Indem man eine sehr grosse Zahl an Schwingungen misst, lässt sich daher der relative Fehler für **eine** Schwingung beliebig gering gestalten. In diesem Versuch sollen Sie die Zeit für 700 Schwingungen messen.

Das Abzählen von mehreren Hundert Schwingungen wird durch folgendes Verfahren erleichtert. Man misst zunächst die Zeit für 100 Schwingungen. Nun berechnet man aus dieser Zeit die sogenannte „Erwartungszeit“ für 200 Schwingungen. Einige Sekunden, bevor die Erwartungszeit erreicht ist, beginnt man die Zeitpunkte der Nulldurchgänge zu registrieren. Zweckmässigerweise signalisiert der eine Partner die Nulldurchgänge durch Klopfen während der andere die Uhr beobachtet. Nun obliegt es demjenigen, der die Uhr bedient, den Nulldurchgang auszumachen, welcher der erwarteten Zeit am nächsten kommt. Dies ist die „gemessene Zeit“ für 200 Schwingungen. Zählt man auf diese Zeit die gemessene Zeit von 100 Schwingungen hinzu, erhält man die Erwartungszeit von 300 Schwingungen etc. Auf diese Weise werden Abzählfehler vermieden. **Wichtig ist hierbei, dass immer nur Zwischenzeiten gestoppt werden und die Uhr im Hintergrund weiterläuft!** Durch wiederholtes Anwenden dieses Verfahrens erhält man so die gemessene Zeit für die gewünschten  $n$  Schwingungen. Schreiben Sie alle gemessenen Zahlen unmittelbar ins Protokollheft, möglichst in Tabellenform:

$n_{\text{Schwingungen}}$	$T_{\text{berechnet}}[s]$	$T_{\text{mess}}[s]$	$A[SKT]$
100			
200			
300			
400			
...			

#### 4. Bestimmung der Dämpfung $\delta$

Für die spätere Korrektur der systematischen Fehler (siehe 4.2 und Anhang) muss man die mittlere maximale Auslenkung  $\phi_{max}$  der Kugel und die Dämpfung  $\delta$  wissen. Am besten schreibt man während der obigen Messung die Auslenkung in Skalenteilen ebenfalls in die Tabelle.

## 6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

Bitte führen Sie zu jedem Wert eine Fehlerrechnung durch. Geben Sie alle verwendeten Formeln an und erläutern Sie kurz, was Sie tun und warum. Zeichnen Sie Ihre Diagramme auf Millimeterpapier und beschriften Sie sie vollständig (zu welcher Aufgabe gehört das Diagramm?, was ist auf den Achsen aufgetragen?). Die korrekte Form zur Angabe von Ergebnissen, sowie Hinweise zur Fehlerrechnung entnehmen Sie bitte der *Allgemeinen Praktikumsanleitung*.

1. Aus den jeweiligen Mittelwerten  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  und  $\bar{x}_3$  und deren Fehlern (Standardabweichung des Mittelwertes) bestimmen Sie die Pendellänge  $L$ .
2. Vernachlässigen Sie zunächst die systematischen Fehler und bestimmen Sie aus  $L$  und  $T_0$  die Erdbeschleunigung  $g$  nach den Formeln (3) und (4).  
Welcher Fehler überwiegt bei der Bestimmung von  $g$ , der der Längenmessung oder der der Zeitmessung? Wieviele Schwingungen hätten Sie zählen müssen, damit der relative Zeitfehler  $\frac{\Delta T_0}{T_0}$  gegenüber dem unvermeidlichen relativen Längenfehler  $\frac{\Delta L}{L}$  vernachlässigbar wäre (also nur etwa ein Zehntel des relativen Fehlers  $\frac{\Delta g}{g}$  ausmachen würde). Wäre das mit dem vorhandenen Aufbau möglich gewesen?
3. Berücksichtigen Sie nun die systematischen Fehler anhand von Gleichung (5) und setzen Sie folgende Werte ein:  $L$  und  $r$  werden anhand der Messwerte des Kathetometers bestimmt. Bedenken Sie bei der Bestimmung des Massenverhältnisses  $m_F/m_K$ , die Materialien von Kugel und Faden. Der Faden ist aus Stahl, hierfür können Sie der Einfachheit halber die Dichte von Eisen verwenden. Die Kugel ist bei einigen Aufbauten ebenfalls aus Stahl, dann ergibt sich das Massenverhältnis aus dem Verhältnis der jeweiligen Volumina ( $\varnothing_F = 0.1$  mm); bei einigen Aufbauten werden jedoch Messingkugeln verwendet, in diesem Fall müssen Sie natürlich die unterschiedlichen Dichten berücksichtigen. Der Winkel  $\phi_{max}$  wird aus der mittleren Schwingungsweite und der Pendellänge bestimmt. Die Luftdichte  $\rho_L$  und die Dichte der Kugel  $\rho_K$  werden aus einer Tabelle entnommen (bitte Quelle angeben).

Die Dämpfung  $\delta$  ist durch die Messung der zeitlichen Abnahme der Schwingungsamplitude  $A(t)$  zu bestimmen.

$$A(t) = A(0)e^{-\delta t} \text{ also } \ln A(t) = \ln A(0) - \delta t$$

Tragen Sie  $\ln A(t)$  graphisch als Funktion von  $t$  auf und ermitteln Sie, indem sie graphisch eine Gerade anpassen, aus deren Steigung  $\delta$ .

4. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Stimmt die gemessene Erdbeschleunigung innerhalb der statistischen Fehlergrenzen mit dem für Köln gültigen Wert  $g = 9.81154$  m/s überein. Wenn nicht, warum nicht?

## 7 Anhang: Herleitung der Formeln

Möchte man die systematischen Fehler (ausgedehnte Massen, große Auslenkungen, Luftauftrieb der Kugel, Reibungskräfte) mitberücksichtigen, so müssen folgende Korrekturterme herangezogen werden:

### 1. Ausgedehnte Massen:

Das Pendel wird als Drehpendel behandelt mit dem Aufhängepunkt als Schwingungsmittelpunkt. Das gesamte Trägheitsmoment des Drehpendels ist das der Kugel (Steinerscher Satz) und des Fadens, während das kleine Trägheitsmoment der Rasierklinge vernachlässigt wird:

$$I_{gesamt} = \underbrace{m_K L^2 + \frac{2}{5} m_K r^2}_{\text{Kugel}} + \underbrace{\frac{1}{3} m_F (L - r)^2}_{\text{Faden}},$$

Dabei sind  $m_K$  bzw.  $m_F$  die Massen von Kugel bzw. Faden,  $L$  ist die Entfernung des Kugelmittelpunktes zum Aufhängepunkt und  $r$  der Radius der Kugel. Ebenfalls hat der Stahlfaden einen Beitrag zum rücktreibenden Drehmoment:

$$N_{gesamt} = - \left( m_K L g + \frac{1}{2} m_F L g \right) \sin \phi$$

Aus  $I_{gesamt} \dot{\omega} = N_{gesamt}$  folgt dann mit  $\sin \phi \approx \phi$  und  $r \ll L$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + \frac{m_F}{2m_K}}{1 + \frac{2r^2}{5L^2} + \frac{m_F}{3m_K}},$$

bzw. mit der Taylorentwicklung  $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + \dots$

$$T_{Mess}^2 = T_0^2 \left( 1 + \frac{2r^2}{5L^2} - \frac{m_F}{6m_K} \right), \quad (6)$$

wobei  $\omega$  die gemessene Kreisfrequenz ist,  $\omega_0$  die Kreisfrequenz des idealen Pendels und  $\phi$  die Auslenkung des Pendels.

### 2. Endliche Auslenkung:

Die Herleitung für große Auslenkungen ist umfangreich und wird nur angedeutet: Die momentane Geschwindigkeit der schwingenden Kugel ist  $v = \sqrt{2gL (\cos \phi - \cos \phi_{max})}$ . Die Periodendauer erhält man dann durch die Integration

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\phi_{max}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_{max}}}. \end{aligned}$$

Eine anschliessende Reihenentwicklung ergibt

$$T_{Mess} \approx T_0 \left( 1 + \frac{\phi_{max}^2}{16} \right),$$

bzw.

$$T_{Mess}^2 \approx T_0^2 \left( 1 + \frac{\phi_{max}^2}{8} \right). \quad (7)$$

### 3. Luftauftrieb:

Durch den Auftrieb der Kugel in der Luft (der des Fadens und der der Rasierklinge wird vernachlässigt) wird die Erdanziehung effektiv um den Faktor  $\left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} \right)$  vermindert. Daher gilt

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} \right)$$

bzw.

$$T_{Mess}^2 = T_0^2 \left( 1 + \frac{\rho_L}{\rho_K} \right). \quad (8)$$

### 4. Dämpfung:

Korrektur auf Frequenzverschiebung infolge der Dämpfung  $\delta$  (Luftreibung)

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

und folglich

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2 = \omega^2 \left( 1 + \frac{\delta^2}{\omega^2} \right)$$

bzw.

$$T_{Mess}^2 = T_0^2 \left( 1 + \frac{\delta^2}{\omega^2} \right) \quad (9)$$

Die Dämpfungskonstante  $\delta$  ergibt sich aus der exponentiellen Abnahme der Schwingungsamplituden  $A$  mit der Zeit  $t$ :

$$A(t) = A(0) e^{-\delta t}. \quad (10)$$

Wenn an der gemessenen Schwingungsdauer  $T_{Mess}$  die Korrekturen (6)-(9) angebracht worden sind, dürfen wir sie mit  $T_0$  identifizieren. Durch Einsetzen in Gl. (3) unter Benutzung der Näherungsformel

$$(1+x)(1+y) \approx 1+x+y \text{ für } x, y \ll 1 \quad (11)$$

ergibt sich

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T_{Mess}^2} \left( 1 + \frac{2r^2}{5L^2} - \frac{m_F}{6m_K} + \frac{\phi_{max}^2}{8} + \frac{\rho_L}{\rho_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \quad (12)$$

## 8 Literatur

- Fehlerrechnung:  
[http://www.astro.uni-koeln.de/teaching\\_seminars/AP/](http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/)  
<http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Kathetometer>
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/springer\\_links/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html)
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001  
[http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e\\_books/springer\\_links/index\\_ger.html](http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html)
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg+Teubner
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger

## 9 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumseinleitung dargelegt wurden.