Versuch M11 für Nebenfächler
Kreisel

I. Physikalisches Institut, Raum 105
Stand: 17. Juli 2012

generelle Bemerkungen

- **bitte Versuchsaufbau (rechts, mitte, links) angeben**
- **bitte Versuchspartner angeben**
- **bitte Versuchsbetreuer angeben**
- **bitte nur handschriftliche Auswertung**

1 Einleitung

Die Kreiselbewegung kommt in vielen Bereichen der Natur vor. In der Mechanik ist sie wichtig für den Diskuswurf, Kreiselkompass (mittlerweile weitesgehend durch GPS ersetzt), moderner Ballistik und Erdrotation. So führt z.B. die Erde unter dem Krafteinfluss der Sonne und des Mondes eine Kreiselbewegung aus, Präzession genannt, bei der die Erdachse in 26000 Jahren einen Kegelmantel beschreibt (das sog. Platonische Jahr). In der mikroskopischen Welt können aber auch Moleküle rotieren und Atome haben einen Eigendrehimpuls (Spin genannt). Das anschauliche Verständnis eines mechanischen Kreiselsystems hilft daher später in der quantenmechanischen Welt z.B die Molekülspektren oder die Kernspin-Resonanz besser zu verstehen.
Bei dem Versuch M11 sollen insbesondere die Kreiselbewegungen der **Nutation** (kräftefreie Bewegung) und die **Präzession** (Bewegung unter Krafteinwirkung) untersucht werden. Die Mathematik dazu ist nicht allzu komplex, aber für den Anfänger ist es manchmal schwierig, die Definitionen und Raumrichtungen des Drehimpulses, der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten, der Kreiselachse etc. zu unterscheiden. Deshalb ist es bei diesem Versuch wichtig, das experimentelle Phänomen wie ein neugieriges Kind zu beobachten und zu verinnerlichen.

2 Vorbereitung (zu Hause)

was Sie zur Vorbereitung lernen sollten (Literaturhinweise gibt es im Anhang):

- Grundlagen: Drehimpuls $\vec{L}$, Trägheitsmoment, Steinerscher Satz, Hauptträgheitsachsen, Drehmoment $\vec{M}$, kräftefreier Kreisel (Nutation), schwerer Kreisel (Präzession), Drehimpulserhaltung $d\vec{L}/dt = 0$
- die in dem Anhang beschriebenen Zusammenhänge
- Anwendungen (für Interessierte): Kreiselkompass, Präzession der Erde, Kernspin-Resonanz
- Was hat das griechische Gericht Gyros mit unserem Kreisel (Gyroskop) zu tun?

3 Versuchsaufbau und -beschreibung

Ein starrer Körper hat sechs Freiheitsgrade, drei der Translation und drei der Rotation. Unser Kreiselsystem wird in einem Punkt (dem Fixpunkt am oberen Ende der vertikalen Drehachse, siehe Abb. 1) festgehalten, so dass nur drei Freiheitsgrade der Rotation vorhanden sind. Die Kreiselscheibe kann sich reibungsarm um eine horizontale, aber verkippbare Figurenachse drehen. An der Kreiselscheibe befindet sich eine Spule, über die ein Faden aufgewickelt werden kann. Nun können mit Hilfe einer Halterung verschiedene Gewichte an den Faden gehängt und so die Kreiselscheibe auf einen definierten Drehimpuls $\vec{L}$ beschleunigt werden.

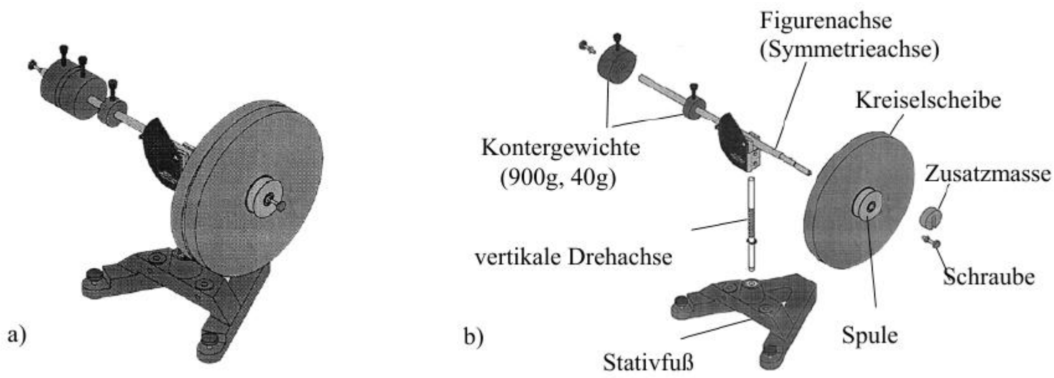

Abbildung 1: Das Gyroskop a) mit zwei Kreiselscheiben b) die Bauteile

Werden die Kontergewichte so eingestellt, dass der Schwerpunkt des Systems (bestehend aus Kreiselscheibe, Kontergewichte, Figurenachse) mit dem Fixpunkt zusammenfällt, so kann die Gravitationskraft kein Drehmoment auf das System ausüben ($\vec{M} = 0$), und der Kreisel bewegt sich kräftefrei. Bei dem kräftefreien Kreisel gilt die Drehimpulserhaltung ($d\vec{L}/dt = \vec{M} = 0$), d.h. der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ steht fest im Raum (auch wenn sich die Kreiselachse bewegt). Eine solche Bewegung eines käftefreien Kreisels nennt man **Nutation**.

Als nicht kräftefrei bezeichnet man einen Kreisel, wenn ein äusseres Drehmoment ($\vec{M} \neq 0$) wirkt. Dies kann man erreichen, indem man das Gleichgewicht des kräftefreien Kreiselsystems durch eine Zusatzmasse (siehe Abbildung) stört. Die entstehende Kreiselbewegung nennt man **Präzession**.

4 Grundlagen

4.1 Winkelgeschwindigkeit, Trägheitsmoment, Drehimpuls

Genau wie von Position $\vec{x}$ und Geschwindigkeit $\vec{x} = d\vec{x}/dt$ bei Translationsbewegungen, sprechen wir bei Rotationsbewegungen von Winkelposition $\vec{\phi}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$. $\vec{x}$ und $\vec{v}$ sind polare Vektoren, deren Betrag und Richtung klar sind. $\vec{\omega}$ dagegen ist ein axialer Vektor (wie alle Kreuzprodukte, Magnetfelder und durch Drehrichtungen festgelegte Vektoren). $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der von der Rotation beschriebenen Ebene. Der Betrag von $\vec{\omega}$ ist die Winkeländerung pro Zeit. Die Richtung von $\vec{\omega}$ (der 'rechte' Drehsinn, vgl. Abb. 2) ist allerdings Konvention.

Von Translationsbewegungen sind wir gewohnt, dass Impuls- und Geschwindigkeitsvek-

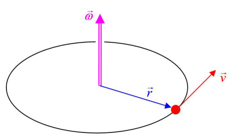

Abbildung 2: Konvention des Drehsinns

tor stets gleichgerichtet sind, da die Trägheit eines Körpers in alle Richtungen gleich ist (s. Abb 3). Es gilt $\vec{p} = m\vec{v}$, wobei die Masse m einfach eine Skalar ist. Für den Drehimpuls

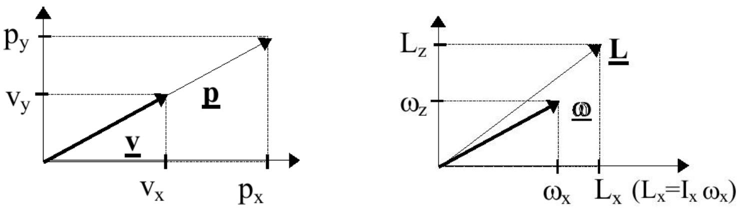

Abbildung 3: (links) Bei der Translation sind $\vec{v}$ und $\vec{p}$ immer kollinear. (rechts) Bei der Rotation gilt dies nicht unbedingt für $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$

kann man zwar analog $\vec{L} = \mathbf{I}\,\vec{\omega}$ schreiben, jedoch ist hier $\mathbf{I}$ der sogenannte Trägheitstensor, den man mit einer 3×3-Matrix darstellen kann. Bei jedem starren Körper findet man drei aufeinander senkrechte Achsen, das sogenannte Hauptträgheitsachsensytem, in dem der Trägheitstensor $\mathbf{I}$ die einfache Darstellung

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit den Hauptträgheitsmomenten I_x, I_y, und I_z hat. Bei einem beliebigen Körper sind die Hauptträgheitsmomente i.A. nicht gleich: $I_x \neq I_y \neq I_z$. Das in diesem Versuch benutzte Kreiselsystem ist allerdings rotationssymmetrisch. Die Symmetrieachse (Figurenachse) ist daher eine der Hauptträgheitsachsen, die wir als als z-Achse des körperfesten Koordinatensystems definieren. Zwei dazu senkrechte Achsen sind die x- und die y-Achse. Es gilt für unseren Fall also $I_x = I_y \neq I_z$ aufgrund der Symmertrie. Eine kurze Anleitung zur Berechnung der Trägheitsmomente findet man im Anhang. Für den Drehimpuls $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ gilt mit $\vec{L} = \mathbf{I}\,\vec{\omega}$ und Gleichung (1)

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)\,. \tag{2}$$

Im allgemeinen Fall haben $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und die Figurenachse (z-Achse) auf Grund der unterschiedlichen Trägheitsmomente $I_x \neq I_y \neq I_z$ verschiedene Richtungen (Abb. 3). Hieraus resultiert die komplizierte, torkelnde Bewegung eines Kreisels. Trotz dieser komplizierten Tatsachen sollte man nicht vergessen, dass bei einem kräftefreien Kreisel (siehe Nutation) aufgrund der geltenden Drehimpulserhaltung der Vektor $\vec{L}$ raumfest ist, um das die Figurenachse und $\vec{\omega}$ Kreiselbewegungen ausführen.

4.2 Nutation

Ist der Kreisel durch das Einjustieren der Kontergewichte im Gleichgewicht, so wirkt auf ihn kein Drehmoment. Bringt man den Kreisel zum Rotieren, ist in diesem Falle der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten und steht daher fest im Raum. Im einfachsten Fall zeigen der raumfeste Drehimpulsvektor $\vec{L}$, der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ und die Kreiselachse in eine Richtung und der rotiernde Kreisel scheint zu ruhen ('schlafender' Kreisel). Gibt man dem

Kreisel jedoch einen kleinen seitlichen Stoss, so sind der Drehimpulsvektor und die Figurenachse (Hauptträgheitsachse) nicht mehr parallel. Gleichung (2) mit $I_x = I_y \neq I_z$ führt dann dazu, dass die Figurenachse und $\vec{\omega}$ nun um den raumfesten Drehimpulsvektor $\vec{L}$ (dieser hat sich durch den Schlag nur leicht geändert) nutieren, so wie in Bild 4 dargestellt. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Nutationsbewegung ist gegeben durch

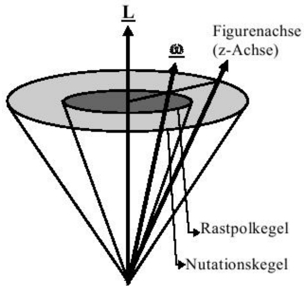

Abbildung 4: Nutationskegel eines kräftefreien Kreisels

$$\Omega_{nut} = \frac{L}{I_x} \tag{3}$$

wobei $L = |\vec{L}|$ der Betrag des Drehimpulses des Kreisels ist und I_x $(= I_y)$ das Trägheitsmoment des symmetrischen Kreisels bezüglich Verdrehung der vertikalen Achse (oder Verkippung). Bitte halten Sie im Hinterkopf, dass zu dem Trägheitsmoment I_x nicht nur die Kreiselscheibe beiträgt, sondern auch die Kontergewichte. Eine Herleitung von Gleichung (3) findet man im Anhang.

4.3 Präzession

Hängt man eine Zusatzmasse m' auf die Figurenachse (siehe Bild (1) und Bild (5) links), so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{a} \times m'\vec{g}$ auf den Kreisel, wobei a der Abstand der Zusatzmasse von dem Aufhängepunkt ist. Durch das Drehmoment ist der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ nicht mehr fest im Raum, sondern führt selbst eine kegelartige Bewegung aus, Präzession

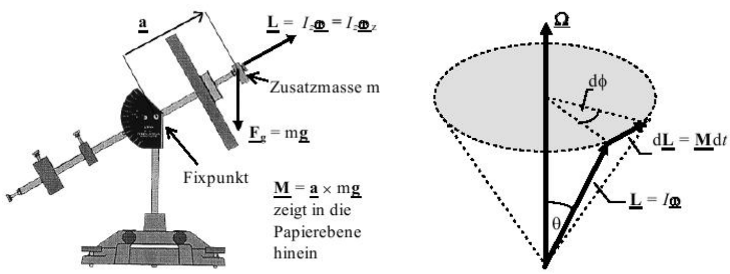

Abbildung 5: (links) Kraft und Drehmoment am Kreisel. (rechts) Präzessionsbeweging des rasch rotierenden symmetrischen Kreisels.

genannt, wie in Bild (5) rechts gezeigt ist. Die Winkelgeschwindigkeit der nutationsfreien Präzessionsbewegung ist gegeben durch

$$\Omega_{pr} = \frac{m'ga}{I_z\omega_z} \tag{4}$$

wobei I_z und ω_z das Trägheitsmoment und die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Figurenachse sind. Eine Herleitung findet sich im Anhang.

5 Durchführung (im Praktikum)

5.1 Justierung des Kreisels und Herstellen des Gleichgewichts

Ziel dieses Teils ist es, die vertikale Drehachse (siehe Abb. 1) vertikal auszurichten und den Kreisel ins Gleichgewicht zu bringen.

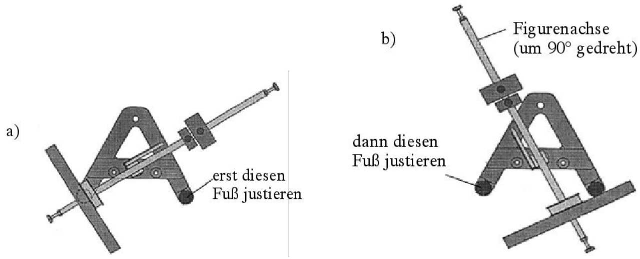

Abbildung 6: Justierung

1. Bringen Sie den Kreisel aus dem Gleichgewicht, indem Sie die Kontergewichte an die vertikale Drehachse schieben. Die Kreiselscheibe lehnt sich dann gegen die vertikale Drehachse.
2. Positionieren Sie den Kreisel wie in Abb. 6 a) und justieren Sie den gezeigten Schraubfüss, so dass die Figurenachse sich nicht wegbewegt.
3. Positionieren Sie nun den Kreisel wie in Abb. 6 b) und justieren Sie den anderen Schraubfuß solange, bis der Kreisel in dieser Stellung stehen bleibt.
4. Bringen Sie den Kreisel durch Verschieben des 900-g-Gegengewichts und des 40-g-Gegengewichts zum Feinabgleich wieder ins Gleichgewicht.

5.2 Beschleunigung der Kreiselscheibe und deren Trägheitsmoment I_z

Bei diesem Versuchsteil wird das Trägheitsmoment der Kreiselscheibe um die Figurenachse I_z bestimmt. Das wird erreicht, indem man die Kreiselscheibe über die Spule mit verschiedenen Massen beschleunigt und die resultierenden Winkelgeschwindigkeiten notiert:

Fällt die Masse m die Höhe h, so gilt die Energiebilanz

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \,, \tag{5}$$

wobei die Endgeschwindigkeit v des Massenstücks und die erreichte Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ω über $v = R_A\omega$ zusammenhängen (R_A = Radius der Spule, vgl. Abb 9). Daraus folgt

$$\frac{2h}{\omega^2} = \frac{I_z}{mg} + \frac{R_A^2}{g} \,. \tag{6}$$

Durchführung:

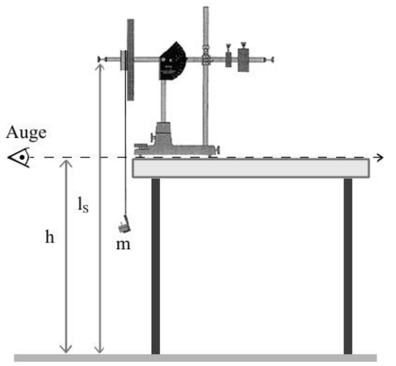

Abbildung 7: Beschleunigung der Kreiselscheibe

1. Fixieren Sie den justierten Kreisel mit Hilfe der Stativstange und Winkelhalterung am Stativfuss und plazieren Sie den Kreisel derart, daß die Spule über die Tischkante hinausragt (siehe Abb. 7).

2. Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe mit der Masse m: Hängen Sie dazu die Schnur mit der Halterung an den hierfür vorgesehenen Dorn und wickeln Sie den Faden sorgfältig auf der Spule auf. Legen Sie die Masse m auf die Halterung, und lassen Sie diese die Kreiselscheibe über eine bestimmte Höhe h beschleunigen.

3. Bestimmen Sie eine Fallhöhe h (Tischhöhe) und messen Sie die erreichte Endwinkelgeschwindigkeit ω der Kreiselscheibe nach der Beschleunigungsphase, indem Sie die Zeit über mehrere Umdrehungen der Kreiselscheibe messen ($\omega = 2\pi/T$). Den Anfang der Strecke h können sie über die Tischfläche anpeilen. Da die Massenhalterung etwas schräg hängt, resultiert daraus ein kleiner Messfehler für h.

4. Führen Sie diesen Versuch mit mind. 5 verschiedenen Massen (inkl. 200 g, 150 g, 100 g und 50 g) je drei mal durch. Die Schnur sollte etwa so lang sein, dass beim Aufschlag der Masse auf den Boden die Schnur vom Dorn der Spule fällt. Beachten Sie, daß die Masse nicht die Tischkante berührt. Notieren Sie auch bitte die Masse der Massenhalterung!

5.3 Nutation

Bei diesem Versuchsteil soll die Nutation beobachtet und kennengelernt werden. Aus der Messung der Nutationsfrequenz kann laut Gleichung (3) das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse I_x bestimmt werden.

Kennenlernen der Nutationsbewegung:
Entfernen Sie die Stativstange und überprüfen Sie das Gleichgewicht des Kreisels (ggf. müssen die Kontergewichte nachjustiert werden). Beschleunigen Sie die Kreiselscheibe (mit einer Masse oder durch ziehen des Seils) und geben Sie der Figurenachse einen seitlichen Stoss. Beobachten Sie die Nutationsbewegung.

Durchführung der quantitativen Messungen:

1. Beschleunigen Sie den Kreisel mit den fünf in Teil 5.2 benutzten Massen m. Da jetzt keine Stativstange angebracht ist, sollte die Figurenachse von einem Teilnehmer möglichst in der Waagerechten gehalten werden, sodass dieselbe Fallhöhe wie in Teil 5.2 realisiert wird. Der Drehimpuls liegt jetzt in der Figurenachse.

2. Bringen Sie den Kreisel durch einen leichten Karate-Schlag senkrecht zur Figurenachse zum Nutieren. Beachten Sie: durch den Schlag geben Sie dem schlafenden Kreisel mit $L = L_z = I_z\omega$ einen weiteren Drehimpuls L_x senkrecht zur Figurenachse. Bei der Herleitung von Gleichung (3) ist L_x von Anfang an vorhanden! Daher sollte der Schlag möglichst gering ausfallen.

3. Messen Sie jeweils die Zeit über mehrere Umläufe der Figurenachse, und bestimmen Sie daraus die Nutationsgeschwindigkeit Ω_{nut}.

4. In der Auswertung soll der hier gemessene Wert des Trägheitsmoments I_x mit dem berechneten Wert verglichen werden. Beachten Sie, dass I_x das Trägheitsmoment bezüglich Verkippung des gesamten Kreiselsystems ist (also nicht nur die der Kreiselscheibe). Die Kontergewichte tragen also zu I_x bei. Notieren Sie bitte daher deren Abstände zur Aufhängung, sowie die Radien der Kreiselscheibe und der Spule.

5.4 Präzession

Bei diesem Versuchsteil soll die Präzession beobachtet und kennengelernt werden. Aus der Messung der Präzessionsfrequenz kann laut Gleichung (4) das Trägheismoment entlang der Figurenachse I_z bestimmt werden.

Kennenlernen der Präzessionsbewegung:

- Bitte Vorsicht! Die Rotationsscheibe kann gegen die vertikale Drehachse schlagen und das Gyroskop beschädigen.

- Überprüfen Sie wiederum das Gleichgewicht des Kreisels und bringen sie es danach durch Ziehen des Seils in Rotation. Beobachten Sie, wie der Kreisel reagiert, wenn man an der vertikalen Achse oder der Figurenachse dreht.

- Bringen Sie die Figurenachse in eine waagerechte Position und hängen Sie eine Zusatzmasse auf die Schraube vor die Rotationsscheibe. Dann macht der rotiernde Kreisel eine Präzessionsbewegung. Je nachdem, ob und in welche Richtung man dem Kreisel eine Anfangsgeschwindigkeit mitgibt, ist die Präzession auch von einer Nutation überlagert, wie das folgende Bild verdeutlicht. Versuchen Sie eine nutationsfreie Präzessionsbewegung zu erzeugen, indem Sie dem Kreisel eine geringe Anfangsgeschwindigkeit in Präzessionsrichtung mitgeben.

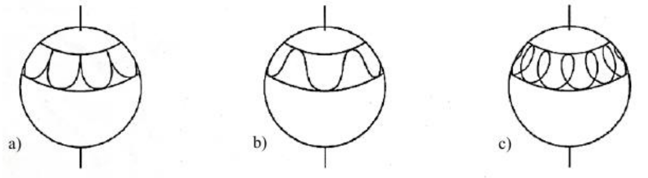

Abbildung 8: Bewegungen eines präzessierenden Kreisels (Schnittkurve der Figurenachse mit der Einheitskugel um den Fixpunkt).

- Bringen Sie den Kreisel zur nutationsfreien Präzession. Fassen Sie die vertikale Drehachse an und versuchen Sie, deren Bewegung leicht zu bremsen oder zu beschleunigen. Was beobachten Sie und wie erklären Sie sich das?

Durchführung der quantitativen Messungen:

1. Überprüfen Sie die Justierung des Kreisels, und bringen Sie ihn mit Hilfe der Gegengewichte sorgfältig ins Gleichgewicht.
2. Hängen Sie eine Zusatzmasse auf die dafür vorgesehene Schraube. Der Abstand vom Massenmittelpunkt zum Unterstützungspunkt beträgt $a = 18,9$ cm (Bild 9).
3. Beschleunigen Sie den Kreisel mit $m = 200$ g (aus Teil 5.2) und lassen Sie ihn in der horizontalen Ebene präzessieren. Eine auftretende Nutation wird verhindert, indem man dem Kreisel eine passende anfängliche Präzessionsbewegung erteilt. Dies ist notwendig, da Gleichung (5) unter der Annahme einer nutationsfreien, horizontalen Präzession hergeleitet wurde.
4. Bestimmen Sie die Präzessionsgeschwindigkeit Ω_{pr} für fünf verschiedene Zusatzmassen m'. Bei der Messung mit $m' = 153$ g sollten zwei Umläufe gemessen werden, um die Genauigkeit der Messung zu steigern.

6 Auswertung und Diskussion (im Praktikum / zu Hause)

6.1 Beschleunigung der Kreisscheibe und Trägheitsmoment I_z

Tragen Sie gemäss Gleichung (6) $2h/\omega^2$ gegen $1/mg$ auf. Führen Sie eine graphische Geradenanpassung durch und bestimmen Sie aus deren Steigung das Trägheitsmoment I_z inkl. Fehler. Beachten Sie die Masse der Massenhalterung. Die Masse der Schnur sowie die Fehler der Massenstücke brauchen Sie nicht zu berücksichtigen.

6.2 Nutation

1. Übernehmen Sie die Endgeschwindigkeiten ω aus dem vorigen Abschnitt und berechnen Sie den jeweiligen Drehimpuls L. Bestimmen Sie aus den fünf experimentellen Werten von Ω_{nut} den Mittelwert von I_x und dessen Fehler.

2. I_x ist das Trägheitsmoment des gesamten Kreiselsystems (inkl. Achse und Kontergewichte) bezüglich Drehung (oder Verkippung) um die vertikale Drehachse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_x mit Hilfe der unteren Skizze und den von Ihnen gemessenen Werte für a_{40}, a_{900}, R_A und R_K. Sie erhalten das Gesamtträgheitsmoment I_x um die vertikale Drehachse als Summe der Einzelkomponenten (2 Kontergewichte, Figurenachse, Kreiselscheibe, Spule), wobei das Trägheitsmoment der Figurenachse $I_{Achse} = 3,77$ gm^2 beträgt. Die Kreiselscheibe inkl. Aluminiumspule hat eine Gesamtmasse von 1735 g; mit der Dichte von Aluminium können Sie die Massen der Kunststoffscheibe und der Spule berechnen. Eine Hilfe zur Berechnung von Trägheitsmomenten finden Sie im Anhang. Wie gut stimmen die beiden Werte für I_x überein?

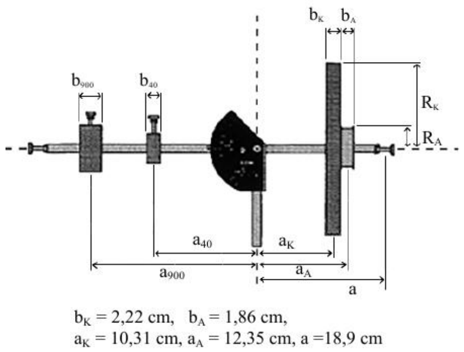

Abbildung 9: Abmessungen des Gyroskops.

6.3 Präzession

1. Übernehmen Sie ω für die Beschleunigungsmasse $m = 200$ g aus Teil 6.1. Tragen Sie $m'ga/\omega$ als Funktion von Ω_{pr} auf und bestimmen Sie aus der Steigung das Trägheitsmoment I_z.

2. Berechnen Sie mit den Daten aus 6.2 das Trägheitsmoment I_z. I_z ist das Trägheitsmoment des Kreiselscheibe (inkl. Spule) bezüglich Drehung um die Figurenachse. Vergleichen Sie alle drei für I_z erhaltenen Werte!

7 Anhang: Herleitung der Formeln

7.1 Berechnung von Trägheitsmomenten

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine gegebene Achse ist definiert als

$$I = \int r^2 dm \tag{7}$$

wobei r der kürzeste Abstand des Massenelementes dm zur Rotationsachse ist. Solch eine Integration führt bei einem Zylinder (siehe Bild (10)) auf

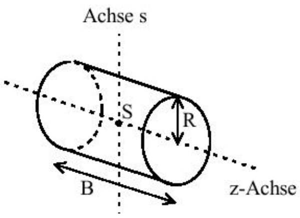

Abbildung 10: homogener Zylinder mit Radius R, Länge B und Masse m

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \tag{8}$$

wenn man als Rotationsachse die Symmetrieachse nimmt. Nimmt man jedoch eine dazu senkrechte Achse durch den Schwerpunkt, so ist das Trägheitsmoment (nach einiger Rechnung)

$$I_s = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12} \right) . \tag{9}$$

Versetzt man zusätzlich die Rotationsachse um den Abstand a aus dem Schwerpunkt, so gilt nach dem Steinerschen Satz

$$I_a = m a^2 + I_s = m \left(a^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{B^2}{12} \right) . \tag{10}$$

Gleichung (10) braucht man zur Berechnung des Trägheitsmomentes I_x in Abschnitt 6.2. Überlegen Sie sich, welche Teile man in Gleichung (10) für grosses a oder kleines B vernachlässigen kann.

7.2 Nutation

Ein kräftefreier Kreisel drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z um seine Figurenachse und habe insgesamt den Drehimpuls $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$, wobei $\vec{L}$ = konstant.

1. Fall: $\vec{L}$ zeigt in Richtung der Figurenachse. Dann bleibt die Figurenachse raumfest, denn es ist (im körperfesten Hauptträgheitssystem)

$$\vec{L} = (0, 0, L_z) = (0, 0, I_z \omega_z) \tag{11}$$

und folglich zeigt $\vec{\omega}$ ($|\vec{\omega}| = \omega_z$) auch in Richtung der Figurenachse (keine Nutation, schlafender Kreisel).

2. (allgemeiner) Fall: $\vec{L}$ hat eine beliebige Richtung. Für einen beliebigen Zeitpunkt t wählen wir die y-Achse des körperfesten Koordinatensystems senkrecht zu der von $\vec{L}$ und der z-Achse (Figurenachse) aufgespannten Ebene. Dann gilt für die y-Komponente $L_y = I_y\omega_y = 0$ und es ist

$$\vec{L} = (L_x, 0, L_z) = (I_x\omega_x, 0, I_z\omega_z)\,. \tag{12}$$

Figurenachse (z-Achse), Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ liegen folglich immer

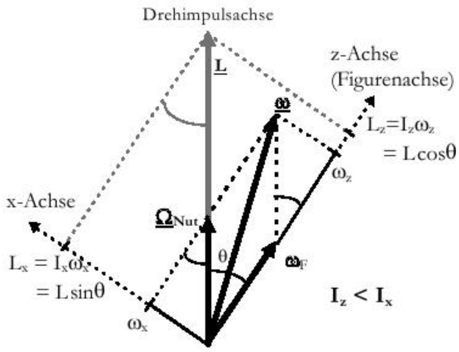

Abbildung 11: Vektorzerlegung beim kräftefreien Kreisel

in einer Ebene, so dass $\vec{\omega}$ in den Richtungen von $\vec{L}$ und der Figurenachse z in Komponentenvektoren zerlegt werden kann (s. Abb. 11).

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{nut} + \vec{\omega}_F\,. \tag{13}$$

Die Punkte der Figurenachse mit den Ortsvektoren $\vec{r} = (0, 0, r_z)$ besitzen die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\Omega}_{nut} \times \vec{r}$ senkrecht zu $\vec{L}$ und zur z-Achse. Jeder Punkt der Figurenachse durchläuft folglich einen Kreis senkrecht zum raumfesten Drehimpuls. Die Figurenachse insgesamt bewegt sich auf dem Mantel eines Kegels, dem Nutationskegel (siehe Bild 4), mit der Spitze im Drehpunkt und dem Öffnungswinkel θ zwischen Drehimpuls und Figurenachse. Die Bewegung heiŝt Nutation. Ebenso durchläuft auch der Vektor der Winkelgeschwindigkeit einen Kegel, den Rastpolkegel. Aus $L_x = I_x\omega_x$, $L_x = L\sin\theta$ und $\omega_x = \Omega_{nut}\sin\theta$ (s. Abb. 11) folgt für den Betrag von $\vec{\Omega}_{nut}$

$$\Omega_{nut} = \frac{L}{I_x} \tag{14}$$

Obige Gleichung wird zur Bestimmung des Trägheitsmomentes senkrecht zur Figurenachse benutzt.

7.3 Präzession

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kreisels, auf den ein äuŝeres Drehmoment wirkt, betrachten wir den einfachen Fall einer nutationsfreien Präzessionsbewegung eines Kreisels

($\vec{L}$ in Richtung der Figurenachse, Winkelgeschwindigkeit ω_z um die Figurenachse). Es folgt $L = I_z\omega_z$. Eine Zusatzmasse m' im Abstand a vom Fixpunkt erzeugt das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{a} \times m'\vec{g} = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0\,. \tag{15}$$

$d\vec{L}$ steht senkrecht auf der von der Figurenachse (Richtung $\vec{a}$) und von $\vec{g}$ aufgespannten Ebene. Der Drehimpuls $\vec{L}$ in Richtung der Figurenachse bleibt dem Betrag nach konstant

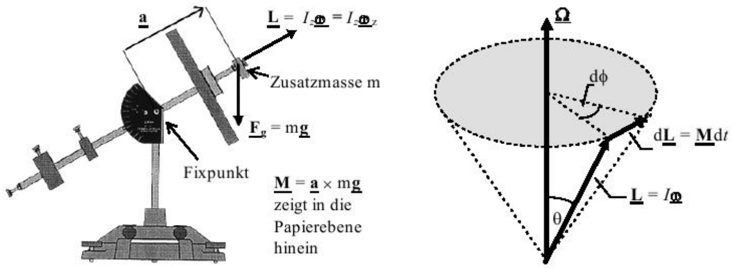

Abbildung 12: (links) Kraft und Drehmoment am Kreisel. (rechts) Präzessionsbeweging des rasch rotierenden symmetrischen Kreisels.

und ändert seine Richtung derart, dass die Spitze des Drehimpulsvektors einen Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_{pr} = d\phi/dt$ durchläuft, wobei $dL/dt = rd\phi/dt$ und $r = L\sin\theta$ ist (s. Abb. 12 rechts). Dabei bezeichnet θ den Winkel zwischen $\vec{\Omega}_{pr}$ (kollinear mit $\vec{g}$) und $\vec{L}$ (in Richtung der z-Achse). Damit erhält man aus Gleichung (15):

$$M = m'ga\sin\theta = \frac{dL}{dt} = \Omega_{pr}L\sin\theta \tag{16}$$

und für Ω_{pr}

$$\Omega_{pr} = \frac{m'ga}{I_z\omega_z} \tag{17}$$

Unter dem Einfluss eines Drehmoments $\vec{M}$ rotiert jeder Punkt der Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_{pr} auf einer Kreisbahn senkrecht zu $\vec{g}$. Die Figurenachse insgesamt durchläuft den Mantel eines Kegels mit dem Öffnungswinkel θ und der Spitze im Fixpunkt.

8 Literatur

- Fehlerrechnung:
  `http://www.astro.uni-koeln.de/teaching_seminars/AP/`
  `http://www.ph2.uni-koeln.de/fileadmin/Lehre/Anfaengerpraktikum/Fehler.pdf`
- Meschede und Gerthsen: Physik, Springer, Berlin, 21. Aufl., 2002, Kapitel 2
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Tipler: Physik, Heidelberg, Spektrum, Akad. Verlag, 1994, Kapitel 8
- Demtröder: Experimentalphysik 1, Springer, 2001, Kapitel 5
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/springer_links/index_ger.html`
- Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik, de Gruyter, Kapitel 11
- Walcher, Elbel und Fischer: Praktikum der Physik, Vieweg+Teubner
- Wegener: Physik für Hochschulanfänger

9 Sicherheitshinweise

Bitte beachten Sie die allgemeinen Sicherheitshinweise, die in der Praktikumseinleitung dargelegt wurden.